А. Киселевъ.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ
АЛГЕБРА

Уч. Ком. М. Н. Пр. допущена въ качествѣ руководства для гимназій мужскихъ и женскихъ, и реальныхъ училищъ („Журн. М. Н. Пр.“, 1916 г. декабрь). Рекомендована Учебн. Ком. при Св. синодѣ для употребленія въ духовныхъ семинаріяхъ въ качествѣ учебнаго пособія („Цѣрк. Вѣд.“, 1898 № 32); одобрена Деп. Торг. и Мануф., какъ пособіе для коммерческихъ училищъ (отъ 30 мая 1898 г.).

Для кадетскихъ корпусовъ рекомендована, какъ руководство.

ИЗДАНІЕ ТРИДЦАТОЕ.



ИЗДАНІЕ
Т-ва „ДУМНОВЪ, наслѣдн. бр. САЛАЕВЫХЪ“.
МОСКВА, Б. Лубянка, д. № 15/17.
ПЕТРОГРАДЪ, Большая Конюшенная № 1.
ХАРЬКОВЪ, Екатеринославская 51.
1919

Предисловіе къ 23-му изданію.

Это изданіе является значительно переработаннымъ сравнительно съ предыдущими. Существенному измѣненію подверглось прежде всего изложеніе отрицательныхъ и положительныхъ чиселъ, а также чиселъ несоизмѣримыхъ.

Прежняя, искусственно введенная, условность въ изложеніи чиселъ отрицательныхъ теперь устранена; въ настоящемъ изданіи числа эти разсматриваются конкретно, какъ символы для выраженія величинъ, имѣющихъ «направленіе», т.-е. такихъ величинъ, которыя могутъ быть понимаемы въ двухъ противоположныхъ смыслахъ. Хотя въ такомъ видѣ изложеніе теряетъ ту краткость, которую оно имѣло прежде, но зато оно въ значительной степени выигрываетъ въ ясности и въ легкости усвоенія, да и потеря въ краткости отчасти вознаграждается тѣми сокращеніями въ дальнѣйшемъ курсѣ (при изложеніи первыхъ четырехъ алгебраическихъ дѣйствій и изслѣдованія уравненій), какія возможно было ввести благодаря болѣе подробному изложенію отрицательныхъ чиселъ.

О несоизмѣримыхъ числахъ въ прежнихъ изданіяхъ давалось понятіе, какъ о *предѣлѣ* нѣкотораго ряда соизмѣримыхъ чиселъ. Такое изложеніе страдало прежде всего логическимъ недостаткомъ, извѣстнымъ подъ названіемъ «заколдованнаго круга» (circulus vitiosus), такъ какъ несоизмѣримое число опредѣлялось при помощи предѣла, тогда какъ понятіе о *числовомъ* предѣлѣ уже предполагаетъ предварительное установленіе понятія о несоизмѣримомъ числѣ и о разности между несоизмѣримымъ числомъ и соизмѣримымъ. Въ настоящемъ изданіи понятіе о несоизмѣримыхъ числахъ и о дѣйствіяхъ надъ ними устанавливается независимо отъ понятія о предѣлѣ. Конечно, въ среднихъ классахъ гимназіи (и другихъ соотвѣтствующихъ учебныхъ заведеній) нѣтъ возможности дать вполнѣ строгую теорію несоизмѣримыхъ чиселъ. Однако можно и должно требовать, чтобы то элементарное понятіе, которое сообщается учащимся въ этихъ классахъ о несоизмѣримыхъ числахъ, не находилось въ противорѣчіи съ научной теоріей ихъ. Это мы и стремились выполнить въ настоящемъ изданіи алгебры.

Съ цѣлью удовлетворить запросы наиболѣе пытливыхъ учениковъ, особенно тѣхъ изъ нихъ, которые предполагаютъ продолжить свое математическое образованіе въ высшемъ учебномъ заведеніи, мы сочли полезнымъ помѣстить въ концѣ книги, въ видѣ особаго приложенія, болѣе строгое и подробное изложеніе теорі

несоизмѣримыхъ чиселъ, помощію теоріи, установленной Дедекиндомъ; теорія эта представляется намъ болѣе доступной пониманію учащихся, чѣмъ теоріи Мере-Кантора, Вейерштрасса и др.

Изложеніе какъ чиселъ отрицательныхъ, такъ и несоизмѣримыхъ ведется нами все время при помощи графическаго представленія чиселъ на числовой прямой, и, слѣдовательно, иллюстрируется соотвѣтствующими наглядными чертежами.

Все вообще изложеніе элементарной алгебры было подвергнуто нами тщательному пересмотру съ цѣлью вездѣ, гдѣ возможно, улучшить изложеніе какъ со стороны его простоты, ясности и убѣдительности, такъ и со стороны отдѣлки словесной формы. Укажемъ, напр., на улучшеніе изложенія свойствъ равенствъ и уравненій, изслѣдованія уравненій 1-й степени, основныхъ свойствъ извлеченія корней, главнѣйшихъ свойствъ неравенствъ.

Изъ предисловія къ 25-му изданію.

Упрощено изложеніе основныхъ теоремъ о равносильности уравненій. Упрощеніе достигнуто тѣмъ, что теперь въ текстѣ самихъ теоремъ говорится только о прибавленіи къ частямъ уравненія одного и того же *числа* и объ умноженіи частей уравненія на одно и то же *число* (отличное отъ нуля), тогда какъ прежде добавлялось еще о прибавленіи *алгебраическаго выраженія* и объ умноженіи на *алгебраическое выраженіе*, при чемъ это выраженіе могло содержать въ себѣ неизвѣстныя или не содержать ихъ. Теперь это добавленіе разсмотрѣно особо, болѣе обстоятельно, въ замѣчаніяхъ къ теоремамъ.

§ 146, озаглавленный «Кажущаяся неопредѣленность», передѣланъ теперь заново. Въ прежнемъ изложеніи возможность сокращать члены дроби на общаго множителя, обращающагося въ 0 при частныхъ значеніяхъ буквъ, допускалась безъ всякихъ оговорокъ, какъ сама собою очевидная; въ этомъ заключалась, конечно, ошибка, такъ какъ сокращеніе на 0 невозможно. Теперь вопросъ разобранъ болѣе обстоятельно (на сколько это возможно въ курсѣ элементарной алгебры).

Изложеніе § 224 («Значеніе общихъ формулъ корней квадратнаго уравненія при $a=0$») нѣсколько измѣнено въ зависимости отъ измѣненнаго изложенія «Кажущейся неопредѣленности».

Упрощено изложеніе «Нѣкоторыхъ свойствъ логариѳмовъ» (§ 299), такъ какъ теперь разсматривается только тотъ случай, когда основаніе логариѳмовъ больше 1, тогда какъ прежде разсматривался и случай, когда это основаніе меньше 1. Теперь послѣдній случай отнесенъ къ мелкому шрифту.

Изъ предисловія къ 27-му изданію.

Измѣнено, согласно замѣчанію Уч. Ком. Мин. Нар. Пр., опредѣленіе одночлена.

Нѣсколько дополнено (обобщено) изложеніе объ уравненіяхъ содержащихъ въ знаменателяхъ неизвѣстныя.

§ 224 («Значеніе общихъ формулъ корней квадратнаго уравненія при $a=0$») изложенъ болѣе обстоятельно, при чемъ этотъ параграфъ разбитъ на два: 224 и 224,а.

Въ § 310 («По данному числу найти логариѳмъ») нѣсколько измѣнено объясненіе нахожденія Log 74,2354 и добавлено (мелкимъ шрифтомъ) обобщеніе пріема нахожденія на общій случай Log $(n+h)$.

Добавлены (мелкимъ шрифтомъ): § 311, а («Предѣлъ погрѣшности приближеннаго логариѳма») и 311, b («Случай, когда данное число неточное»).

Въ § 312 нѣсколько измѣнено объясненіе нахожденія числа по данному логариѳму 2, 59449 и добавлено (мелкимъ шрифтомъ) обобщеніе пріема на какой угодно 5-тизначный логариѳмъ.

Добавленъ (мелкимъ шрифтомъ) § 313, а («Предѣлъ погрѣшности числа, найденнаго по данному логариѳму»).

Въ § 316 примѣръ 1-й (на вычисленіе помощью логариѳмовъ) взятъ иной, болѣе удобный, при чемъ добавленъ § 316, а (мелкимъ шрифтомъ), въ которомъ находится предѣлъ погрѣшности числа, найденнаго въ примѣрѣ 1-мъ. Примѣры 2-й и 3-й оставлены прежніе, но сдѣланы къ нимъ добавленія (мелк. шр.) о предѣлѣ погрѣшности.

Прежнее «Приложеніе 2» (въ концѣ книги, о предѣлѣ погрѣшности, совершаемой при вычисленіи помощью пятизначныхъ логариѳмовъ) теперь выпущено, такъ какъ содержаніе этого приложенія (въ нѣсколько упрощенномъ видѣ) отнесено теперь частью къ § 311, а частью къ § 313, а. Взамѣнъ того теперь помѣщено новое «Приложеніе 2», въ которомъ излагается нахожденіе верхняго предѣла погрѣшности, совершаемой вслѣдствіе допущенія пропорціональности разностей между логариѳмами разностямъ соотвѣтствующихъ чиселъ.

Изъ предисловія къ 28-му изданію.

Послѣ «алгебраическаго дѣленія» добавлена (мелкимъ шрифтомъ) новая весьма важная для основъ алгебры глава VI: «Условія тождественности многочленовъ», въ которой устанавливается *законъ тождества многочленовъ* съ однимъ и съ нѣсколькими пе-

...ными и, какъ слѣдствіе изъ него, выводятся *однозначности* первыхъ четырехъ алгебраическихъ дѣйствій надъ многочленами. Такимъ образомъ, ощущавшаяся въ прежнихъ изданіяхъ недостаточность обоснованія нѣкоторыхъ основныхъ вопросовъ элементарной алгебры теперь устранена.

Въ прежнихъ изданіяхъ изложеніе теоремъ объ отрицательныхъ показателяхъ было разбросано по разнымъ мѣстамъ курса. Теперь все, относящееся до этихъ показателей, собрано въ одно цѣлое и помѣщено вмѣстѣ съ главою о дробныхъ и ирраціональныхъ показателяхъ непосредственно передъ отдѣломъ («Логариѳмы»), въ которомъ является впервые настоятельная потребность въ обобщеніи понятія о показателѣ на всѣ виды вещественныхъ чиселъ.

Въ § 235 (мелкимъ шрифтомъ—«Освобожденіе уравненія отъ знаковъ радикала помощью неопредѣленныхъ коэффиціентовъ») сдѣлано небольшое добавленіе (въ согласіи со статьею прив.-доц. *Е. Л. Буницкаго*—«Къ вопросу объ освобожденіи знаменателя дроби отъ радикаловъ», помѣщенною въ Вѣстникѣ опытной физики и элементарной математики за 1915 г., № 630), добавленіе разъясняющее, что указанный способъ всегда приводитъ къ цѣли.

Съ цѣлью по возможности сократить объемъ учебника мы устранили изъ настоящаго изданія помѣщавшіяся прежде въ концѣ книги (необязательныя для прохожденія) два приложенія: одно излагающее теорію ирраціональныхъ чиселъ, какъ сѣченій въ области чиселъ раціональныхъ, и другое, устанавливающее при помощи логариѳмическаго ряда размѣръ погрѣшности, происходящей отъ допущенія пропорціональности разностей между логариѳмами разностямъ между соотвѣтствующими числами.

Предисловіе къ 30-му изданію.

Изъ небольшихъ измѣненій, введенныхъ въ это изданіе, укажемъ слѣдующія:

Выпущенъ прежній § 84 (Теорема: если многочленъ обращается въ нуль при n различныхъ значеніяхъ перемѣнной, то...) по его безполезности въ курсѣ элементарной алгебры; сообразно съ этимъ нѣсколько измѣнено замѣчаніе къ § 85.

§ 117 (Уравненія, содержащія въ знаменателяхъ неизвѣстныя) во 1-хъ, соединенъ въ одно цѣлое съ замѣчаніемъ предыдущаго § 116, во-2-хъ, значительно сокращенъ, такъ какъ изъ него выпущено все то, что говорится о рѣшеніи $x=\infty$ (такія рѣшенія въ элементарной алгебрѣ преждевременно разсматривать).

Все содержаніе книги тщательно просмотрѣно и исправлено.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Передъ главами, напечатанными мелкимъ шрифтомъ, поставлена звѣздочка.

ОТДѢЛЪ I.

Предварительныя понятія.

ГЛАВА I.

Алгебраическое знакоположеніе.

1. Употребленіе буквъ. 1) Для обобщенія задачъ. Если желаютъ указать, какъ рѣшаются задачи, сходныя между собою по условіямъ, но различающіяся только величиною данныхъ чиселъ, то обыкновенно поступаютъ такъ: обозначаютъ данныя числа буквами (латинскаго или французскаго алфавита [1]) и, разсуждая совершенно такъ, какъ если бы данныя числа были выражены цифрами, указываютъ посредствомъ знаковъ, какія дѣйствія надо произвести надъ данными числами и въ какой послѣдовательности, чтобы получить искомое число. При этомъ, обозначивъ одно число какою-нибудь буквою, другія числа обозначаютъ иными буквами, чтобы не смѣшать одного числа съ другимъ.

Пусть, напр., мы желаемъ узнать, какъ рѣшаются задачи, сходныя съ такой: 15 рабочихъ окончили нѣкоторую работу въ 20 дней. Во сколько дней окончили бы ту же работу 10 человѣкъ? Для этого предлагаемъ задачу въ общемъ видѣ:

a рабочихъ окончили нѣкоторую работу въ t дней. Во сколько дней окончатъ ту же работу b рабочихъ?

Рѣшимъ эту задачу приведеніемъ къ единицѣ. Если a рабочихъ оканчиваютъ работу въ t дней, то 1 рабочему на выполненіе

---

[1]) Употребительны также и буквы греческаго алфавита, чаще всего слѣдующія: α (альфа), β (бэта), γ (гамма), δ (дельта), ε (эпсилонъ), θ (тэта), π (пи), ρ (ро), φ (фи), ω (омега).

той же работы понадобится $t \times a$ дней, а b раочимъ $\frac{t \times a}{b}$ дне
Обозначивъ искомое число дней буквою x, можемъ написать:

$$x = \frac{t \times a}{b}.$$

Равенство это наз. алгебраическою формулою, оно выражаетъ что искомое въ задачѣ число x получится, если число дне умножить на число рабочихъ, данное въ условіи задачи, и раз дѣлить на число рабочихъ, данное въ ея вопросѣ.

2) **Для выраженія свойствъ чиселъ.** Если желаемъ кратко вы разить, что нѣкоторое свойство принадлежитъ не какимъ-нибу отдѣльнымъ числамъ, а всѣмъ числамъ, или группѣ чиселъ то обыкновенно числа эти обозначаютъ буквами. Такъ, свой ство, что произведеніе двухъ чиселъ не измѣняется отъ пере мѣны порядка сомножителей, можно выразить равенствомъ:

$$a \times b = b \times a.$$

Это равенство есть алгебраическая формула, выражающая что произведеніе какого-нибудь числа a на другое како нибудь число b равно произведенію этого другого числа b н первое число a.

2. Алгебраическое выраженіе. Совокупность чисел изъ которыхъ всѣ или только нѣкоторыя выражены буквами и кот рыя соединены посредствомъ знаковъ, указывающихъ, какія дѣйстві и въ какой послѣдовательности надо произвести надъ этими числ называется алгебраическимъ выраженіемъ (или просто выраженіемъ

Таковы, напр., выраженія: $\frac{t \times a}{b}$; $a \times b$; $2.a + 5$.

Вычислить алгебраическое выраженіе для данныхъ числен ныхъ значеній буквъ значитъ подставить въ него на мѣст буквъ эти значенія и произвести указанныя дѣйствія; число получившееся послѣ этого, наз. численною величиною алгебраи ческаго выраженія (для данныхъ значеній буквъ). Такъ, чи ленная величина перваго изъ указанныхъ выше выраженій пр $t = 20$, $a = 15$ и $b = 10$ есть 30.

Формула. Два алгебраическія выраженія, соединенныя между собою знакомъ равенства или неравенства, образуютъ алгебраическую формулу; напр.:

$$a \times b = b \times a; \quad a + 1 > a.$$

3. Тождественныя выраженія. Два алгебраическихъ выраженія наз. тождественными, если при всякихъ численныхъ значеніяхъ буквъ они имѣютъ одну и ту же численную величину. Таковы, напр., выраженія:

$$\frac{t \times a}{b} \text{ и } t \times \frac{a}{b}; \quad a \times b \text{ и } b \times a$$

4. Предметъ алгебры. Алгебра прежде всего указываетъ способы, посредствомъ которыхъ одно алгебраическое выраженіе можетъ быть преобразовано въ другое, тождественное ему. Цѣль такого преобразованія можетъ быть различна:

или 1) упрощеніе алгебраическаго выраженія, т.-е. замѣна одного выраженія другимъ, содержащимъ меньшее число дѣйствій, или болѣе простыя дѣйствія;

или 2) приведеніе алгебраическаго выраженія къ виду, удобному для обнаруженія какихъ-либо свойствъ его;

или 3) приведеніе алгебраическаго выраженія къ виду, удобному для запоминанія.

О другомъ назначеніи алгебры будетъ сказано впослѣдствіи (§ 100).

5. Дѣйствія, разсматриваемыя въ алгебрѣ, слѣдующія: сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степень и извлеченіе корня [1]). Опредѣленія первыхъ пяти дѣйствій извѣстны изъ ариѳметики, а именно:

Сложеніе есть дѣйствіе, посредствомъ котораго нѣсколько чиселъ соединяются въ одно число, называемое ихъ суммой.

Вычитаніе есть дѣйствіе (обратное сложенію), посредствомъ котораго по данной суммѣ (уменьшаемому) и одному слагаемому (вычитаемому) отыскивается другое слагаемое (остатокъ или разность).

---

[1]) О седьмомъ дѣйствіи—логариѳмированіи—будетъ говориться въ концѣ книги особо.

Умноженіе на цѣлое число есть дѣйствіе, посредствомъ котораго одно данное число (множимое) повторяется слагаемымъ столько разъ, сколько единицъ въ другомъ данномъ числѣ (во множителѣ); **умноженіе на дробь** есть дѣйствіе, посредствомъ котораго отыскивается такая дробь отъ множимаго, какую множитель составляетъ отъ единицы.

Дѣленіе есть дѣйствіе (обратное умноженію), посредствомъ котораго по данному произведенію (дѣлимому) и одному сомножителю (дѣлителю) отыскивается другой сомножитель (частное).

Возвышеніе въ степень есть дѣйствіе, посредствомъ котораго находится произведеніе нѣсколькихъ одинаковыхъ сомножителей; такое произведеніе называется степенью, а число одинаковыхъ сомножителей—показателемъ степени. Такъ, возвысить 2 въ четвертую степень значитъ найти произведеніе 2.2.2.2 (оно равно 16); 16 есть четвертая степень двухъ 4—показатель этой степени. Вторая степень называется иначе **квадратомъ**, третья—**кубомъ**.

Первою степенью числа называютъ само это число.

Шестое дѣйствіе—извлеченіе корня—опредѣляется такъ:

Извлеченіе корня есть дѣйствіе (обратное возвышенію въ степень), посредствомъ котораго по данной степени и показателю этой степени находится возвышаемое число. Напр., извлечь изъ 8 корень третьей степени значитъ найти число, котораго 3-я степень равняется 8, такое число есть 2, потому что 2.2.2 = 8; корень второй степени изъ 100 есть 10, потому что 10.10 = 100. Корень второй степени называется иначе **квадратнымъ**, а корень третьей степени—**кубичнымъ**.

6. Знаки, употребляемые въ алгебрѣ. 1) **Для обозначенія дѣйствій.** Въ алгебрѣ для обозначенія первыхъ четырехъ дѣйствій употребляются тѣ же знаки, какъ и въ ариѳметикѣ; только знакъ умноженія обыкновенно не пишется, если оба сомножителя или одинъ изъ нихъ выражены буквами напр., вмѣсто того, чтобы писать $a \times b$ или $a.b$, обыкновенно пишутъ ab и вмѣсто $3.a$ просто $3a$.

Возвышеніе въ степень обозначается помѣщеніемъ показателя

степени надъ возвышаемымъ числомъ, съ правой стороны; напр. 2^4 обозначаетъ, что 2 возвышается въ 4 ю степень.

При всякомъ числѣ можно подразумѣвать показателя 1; напр. a все равно, что a^1, потому что первою степенью какого-нибуд числа наз. само это число.

Извлеченіе корня обозначается знакомъ $\sqrt{\ }$; подъ его гори зонтальной чертой пишутъ то число, изъ котораго надо извлеч корень, а надъ отверстіемъ угла ставятъ показателя корня напр., $\sqrt[3]{8}$ означаетъ корень 3-й степени изъ 8.

Впрочемъ, квадратный корень принято писать безъ показа теля, т. е. такъ: $\sqrt{25}$, $\sqrt{100}$ и т. д.

2) Для указанія равенства или неравенства чиселъ. Какъ знак соотношеній между численными величинами употребляются знакъ равенства $=$ и знакъ неравенства $>$, обращаемый отвер стіемъ угла къ бо́льшему числу. Напр., выраженія:

$$5+2=7;\quad 5+2>6,\quad 5+2<10$$

читаются такъ: $5+2$ равно 7; $5+2$ больше 6; $5+2$ меньше 10

Иногда помѣщаютъ два знака другъ подъ другомъ; напр. выраженія:

$$1)\ a\geqq b;\quad 2)\ a\lessgtr b;\quad 3)\ a\pm b$$

означаютъ: 1) a больше или равно b; 2) a больше или меньше b 3) a плюсъ или минусъ b.

Употребительны еще знаки $\neq$, $\not>$, $\not<$, получаемые перечер киваніемъ знаковъ равенства или неравенства. Такое перечер киваніе означаетъ отрицаніе того значенія, которое придается знаку неперечеркнутому. Такъ, знакъ $\neq$ означаетъ: «не равно», знакъ $\not<$ означаетъ «не меньше» и т. п.

3) Для указанія порядка дѣйствій. Если желаютъ выразить, что совершивъ какое-либо дѣйствіе, надо надъ полученнымъ резуль татомъ произвести снова какое-либо дѣйствіе, то обозначені перваго дѣйствія заключаютъ въ скобки. Напр., выраженіе:

$$20-(10+2)$$

означаетъ, что изъ 20 вычитается не 10, а сумма отъ сложенія 10 съ 2; слѣд., при вычисленіи этого выраженія надо сначала

сложить 10 и 2 (получимъ 12) и затѣмъ полученную сумму вы честь изъ 20 (получимъ 8).

Когда приходится заключить въ скобки такое выраженіе, в которомъ есть свои скобки, то новымъ скобкамъ придаю какую-нибудь другую форму. Напр., выраженіе:

$$a\{b-[c+(d-e)]\}$$

означаетъ, что изъ d вычитается e, полученная разность при кладывается къ c, полученная сумма вычитается изъ b и па эт разность умножается a.

7. Нѣкоторыя замѣчанія относительно упо требленія скобокъ. Такъ какъ употребленіе скобок имѣетъ цѣлью указать, въ какомъ порядкѣ надо производит дѣйствія надъ числами, то скобки отбрасываются во всѣ тѣхъ случаяхъ, когда и безъ нихъ не можетъ быть въ этом отношеніи недоразумѣнія. Напр., скобки не ставятся при обозна ченіи послѣдовательныхъ сложеній, вычитаній, умноженій, такъ

вмѣсто $[(a+b)+c]+d$ пишутъ $a+b+c+d$
$[(a-b)+c]-d$ » $a-b+c-d$
$[(ab)c]d$ » $abcd$.

Въ этихъ случаяхъ порядокъ дѣйствій указывается самим выраженіемъ (слѣва направо).

Горизонтальная черта, употребляемая для обозначенія дѣле нія или для извлеченія корня, замѣняетъ собою скобки; та выраженія:

$$\frac{a+b}{c} \text{ и } \sqrt{a^2+b^2}$$

означаютъ то же самое, что и выраженія:

$$\frac{(a+b)}{c} \text{ и } \sqrt{(a^2+b^2)}$$

(если только черта берется достаточной длины).

Кромѣ того, чтобы уменьшить число случаевъ, когда над писать скобки, условились держаться слѣдующаго правил

алгебраическое выраженіе пишутъ безъ скобокъ, если при его вычисленіи дѣйствія должны слѣдовать въ такомъ порядкѣ: сначала возвышеніе въ степень и извлеченіе корня (конечно, если эти дѣйствія указаны), затѣмъ умноженіе и дѣленіе, и, наконецъ, сложеніе и вычитаніе.

Если же нужно указать иную послѣдовательность дѣйствій, или если примѣненіе указаннаго правила возбуждаетъ какія-либо сомнѣнія, то пользуются скобками.

Напр., въ такомъ выраженіи, написанномъ безъ скобокъ

$$ab^2+c$$

указаны 3 дѣйствія: умноженіе, возвышеніе въ степень и сложеніе. Согласно правилу эти дѣйствія должны быть произведены въ такой послѣдовательности: сначала возвышеніе въ степень, потомъ умноженіе и послѣ сложеніе. Итакъ, надо сначала возвысить въ квадратъ; но что возвысить: только ли число b, или произведеніе ab? Конечно только число b, такъ какъ если бы требовалось возвысить въ квадратъ произведеніе ab, то сначала надо было бы сдѣлать умноженіе (a на b), а затѣмъ возвышеніе въ квадратъ, т.-е. надо было бы совершить дѣйствія въ порядкѣ иномъ, чѣмъ указано въ правилѣ, и тогда нужно было бы поставить скобки, именно такъ: $(ab)^2$. Послѣ возвышенія b въ квадратъ надо перейти къ умноженію. Но что умножать: a на b^2, или a на сумму b^2+c. Конечно, a на b^2, такъ какъ если бы требовалось умножить a на сумму b^2+c, то сначала надо было бы сдѣлать сложеніе чиселъ b^2 и c, а затѣмъ уже умноженіе, т.-е. тогда дѣйствія должны были бы совершаться въ порядкѣ иномъ, чѣмъ указано въ правилѣ, и, слѣд., нужно было бы поставить скобки, а именно, написать такъ: $a(b^2+c)$.

Если дано выраженіе $a:bc$, въ которомъ только два дѣйствія: дѣленіе и умноженіе, то остается невыясненнымъ, какое изъ этихъ дѣйствій должно быть выполнено сначала (такъ какъ въ указанномъ выше правилѣ объ этомъ ничего не говорится); для избѣжанія недоразумѣній въ подобныхъ случаяхъ лучше ставить скобки; если мы напишемъ такъ $a:(bc)$, то сначала надо b умножить на c, а затѣмъ раздѣлить a на произведеніе bc; если же скобки поставимъ такимъ образомъ: $(a:b)c$, то прежде придется раздѣлить a на b, а затѣмъ это частное умножить на c.

Впрочемъ, выраженіе $a:bc$, написанное безъ скобокъ, принято понимать въ смыслѣ $a:(bc)$, т.-е. что надо сдѣлать сначала умноженіе, а потомъ дѣленіе.

ГЛАВА II.

Главнѣйшія свойства первыхъ четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій.

8. Свойства прямыхъ дѣйствій: сложенія и умноженія. Изъ свойствъ этихъ дѣйствій укажемъ слѣдующія

1°. **Сумма не измѣняется отъ перемѣны порядка слагаемыхъ.**

Напр., сумма $7+3+2$ равна 12; если измѣнимъ какъ бы то ни было порядокъ слагаемыхъ, напр., такъ $3+2+7$, то получимъ все ту же сумму 12.

Свойство это въ примѣненіи къ тремъ слагаемымъ можно выразить такою буквенною формулой (обозначая буквами a, b и c какія-нибудь три числа):

$$a+b+c=a+c+b=b+a+c=b+c+a=\ldots$$

Это свойство носитъ названіе перемѣстительнаго, такъ какъ оно состоитъ въ неизмѣняемости суммы отъ перемѣщенія слагаемыхъ.

2°. **Сумма не измѣнится, если какія-либо слагаемыя мы замѣнимъ ихъ суммою.**

Напр., сумма $12+3+7$, равная 22, не измѣнится, если въ ней какія-нибудь слагаемыя, напр., второе и третье, замѣнимъ ихъ суммой: $12+(3+7)=12+10=22$.

Свойство это называется **сочетательнымъ**, такъ какъ оно состоитъ въ томъ, что нѣсколько слагаемыхъ, не измѣняя суммы, мы можемъ сочетать (соединять) въ одно число.

Въ примѣненіи къ тремъ слагаемымъ сочетательное свойство можно выразить такой формулой:

$$a+b+c=a+(b+c)\ ^{1)}.$$

---

[1]) Замѣтимъ, что безполезно было бы писать такъ: $a+b+c=(a+b)+c$, такъ какъ выраженіе со скобками $(a+b)+c$ означаетъ совершенно то же самое, что и выраженіе безъ скобокъ $a+b+c$, а именно, что къ a прикладывается b и къ полученной суммѣ прикладывается c.

Читая это равенство справа налѣво, т. е. такъ: $a + (b + c) = a + b + c$, мы можемъ высказать то же сочетательное свойство въ другой словесной формѣ: **чтобы къ какому-нибудь числу прибавить сумму, достаточно прибавить къ этому числу каждое слагаемое суммы одно за другимъ.**

Изъ сочетательнаго свойства, между прочимъ, слѣдуетъ чтобы вычислить сумму нѣсколькихъ слагаемыхъ, можно разбить эти слагаемыя на какія угодно группы, произвести сложеніе въ каждой группѣ отдѣльно и полученныя суммы соединить въ одну.

3°. Произведеніе не измѣняется отъ перемѣны порядка сомножителей.

Такъ: $2 \cdot {}^5/_7 \cdot 3 = 3 \cdot 2 \cdot {}^5/_7 = {}^5/_7 \cdot 3 \cdot 2 =$

Вообще: $abc = acb = cab = \ldots$

Это переместительное свойство умноженія доказано въ ариѳметикѣ сначала для цѣлыхъ чиселъ, а затѣмъ и для дробей.

4°. Произведеніе не измѣнится, если какихъ-либо сомножителей мы замѣнимъ ихъ произведеніемъ.

Напр., произведеніе $7 \cdot 2 \cdot 5$, равное 70, останется безъ измѣненія, если сомножителей 2 и 5 замѣнимъ ихъ произведеніемъ: $7 \cdot (2 \cdot 5) = 7 \cdot 10 = 70$.

Въ примѣненіи къ произведенію трехъ сомножителей сочетательное свойство умноженія можно выразить такимъ равенствомъ

$$abc = a(bc).$$

Читая это равенство справо налѣво, мы можемъ то же сочетательное свойство выразить иначе: **чтобы умножить какое-нибудь число (a) на произведеніе (bc), достаточно умножить это число на перваго сомножителя (получимъ ab), результатъ умножить на второго сомножителя (получимъ abc) и т. д.**

Изъ сочетательнаго свойства умноженія, между прочимъ слѣдуетъ: чтобы вычислить произведеніе нѣсколькихъ сомножителей, можно разбить этихъ сомножителей на какія угодно группы, произвести умноженіе въ каждой группѣ отдѣльно и полученныя произведенія перемножить.

3°. Чтобы умножить сумму на какое-нибудь число, достаточно умножить на это число каждое слагаемое отдѣльно и полученныя произведенія сложить.

Такъ, чтобы умножить сумму $300 + 20 + 5$ (т.-е. число 325) на 8, достаточно умножить на 8 отдѣльно 300, 20 и 5 и полученныя числа сложить.

Это свойство произведенія называется **распредѣлительнымъ**, такъ какъ оно состоитъ въ томъ, что дѣйствіе умноженія, производимое надъ суммой, распредѣляется на каждое слагаемое.

Въ примѣненіи къ суммѣ 2-хъ слагаемыхъ это свойство можно выразить такой формулой:

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Такъ какъ произведеніе не мѣняется отъ перемѣны порядка сомножителей, то формулу эту можно писать и такъ:

$$c(a + b) = ca + cb.$$

Поэтому распредѣлительное свойство иногда высказываютъ такъ: **чтобы умножить какое-нибудь число на сумму, достаточно умножить это число на каждое слагаемое отдѣльно и полученныя произведенія сложить.**

9. Свойства обратныхъ дѣйствій: вычитанія и дѣленія. Изъ свойствъ, принадлежащихъ обратнымъ дѣйствіямъ, т.-е. вычитанію и дѣленію, укажемъ слѣдующія:

1°. Чтобы отнять отъ какого-нибудь числа сумму, достаточно отнять отъ этого числа каждое слагаемое одно за другимъ.

Такъ: $20 - (3 + 8 + 2) = 20 - 3 - 8 - 2.$

Вообще: $a - (b + c + d) = a - b - c - d.$

Это свойство можно считать очевиднымъ.

2°. Чтобы прибавить къ какому-нибудь числу разность, достаточно прибавить къ этому числу уменьшаемое и вычесть вычитаемое.

Такъ: $8 + (5 - 3) = 8 + 5 - 3.$

Вообще: $a + (b - c) = a + b - c.$

Дѣйствительно, если второе слагаемое увеличимъ на c, т.-е. вмѣсто $b - c$ возьмемъ b, то получимъ сумму $a + b$; но отъ уве

личенія слагаемаго на c, сумма увеличивается также на c; слѣд., искомая сумма должна быть меньше $a+b$ на c, т.-е. она будетъ $a+b-c$.

3°. **Чтобы отнять отъ какого-нибудь числа разность, достаточно прибавить къ этому числу вычитаемое и затѣмъ отнять уменьшаемое.**

Такъ: $4-(5-2)=4+2-5$.

Вообще: $a-(b-c)=a+c-b$).

Дѣйствительно, если мы увеличимъ уменьшаемое и вычитаемое на c, то разность не измѣнится; но тогда уменьшаемое будетъ $a+c$, а вычитаемое b; слѣд., разность будетъ $a+c-b$.

4. **Чтобы раздѣлить какое-нибудь число на произведеніе, достаточно раздѣлить это число на перваго сомножителя, полученный результатъ на второго, потомъ на третьяго и т. д.**

Такъ: $400:(4.2.5)=[(400:4):2].5=(100.2):5=50:5=10$.

5°. **Чтобы раздѣлить произведеніе на какое-нибудь число, достаточно раздѣлить на это число какого-либо одного сомножителя.**

Такъ, чтобы раздѣлить произведеніе 10.8 на 2, достаточно раздѣлить на 2 или 10, или 8; въ первомъ случаѣ получимъ $5.8=40$ и во второмъ случаѣ $10.4=40$.

10. Примѣненіе этихъ свойствъ. Указанныя свойства позволяютъ дѣлать нѣкоторыя простѣйшія преобразованія алгебраическихъ выраженій; приведемъ этому примѣры:

1) $a+b+a+2+b+a+8=(a+a+a)+(b+b)+$
$+(2+8)=a.3+b.2+10=3a+2b+10$.

2) $a+(b+a)=a+b+a=(a+a)+b=2a+b$.

3) $a.(3xxa).(4ay)=a.3.x.x.a.4.a.y=(3.4)(aaa)(xx)y=$
$=12a^3x^2y$.

4) $a^3a^2=(aaa)(aa)=aaaaa=a^5$.

5) $(a+x+1).3=a.3+x.3+3=3a+3x+3$.

6) $x(ax^2+x)=x(ax^2)+xx=xaxx+xx=a(xxx)+xx=$
$=ax^3+x^2$.

7) $m+(a-m)=m+a-m=a+m-m=a$.

8) $p-(q-p)=p+p-q=2p-q$.

9) $\frac{9ab}{3}=\frac{9}{3}ab=3ab$.

ГЛАВА III.

Положительныя и отрицательныя числа.

11. Предварительное замѣчаніе. Въ началѣ курса ариѳметики мы разсматривали число только, какъ собраніе единицъ; въ этомъ смыслѣ число представляется всегда цѣлымъ. Мы видѣли тогда, что для этихъ чиселъ два обратныя дѣйствія—вычитаніе и дѣленіе—не всегда возможны, а именно первое невозможно, когда вычитаемое больше уменьшаемаго (напр., нельзя вычесть 7 изъ 5), а второе невозможно, когда дѣлимое не кратно дѣлителя (напр., невозможно раздѣлить 12 на 5, или 3 на 7). Перейдя затѣмъ въ ариѳметикѣ къ другому понятію о числѣ, какъ о результатѣ измѣренія величинъ, мы должны были расширить область чиселъ, введя понятіе о дробномъ числѣ. Это расширеніе дало намъ возможность выражать числами и такія значенія величинъ, въ которыхъ единица измѣренія не повторяется цѣлое число разъ, или которыя меньше этой единицы. При этомъ, между прочимъ, оказалось, что съ введеніемъ въ ариѳметику дробныхъ чиселъ дѣйствіе дѣленія сдѣлалось возможнымъ и въ тѣхъ случаяхъ, когда дѣлимое не кратно дѣлителя (напр., частное 12 : 5 равно $2^2/_5$, частное 3 : 7 равно $^3/_7$ и т. д.). Однако, вычитаніе и для дробныхъ чиселъ осталось невозможнымъ въ томъ случаѣ, когда вычитаемое больше уменьшаемаго.

Теперь, переходя отъ ариѳметики къ алгебрѣ, мы прежде всего займемся дальнѣйшимъ расширеніемъ понятія о числѣ съ цѣлью имѣть возможность выражать посредствомъ чиселъ значенія величинъ особаго рода, о которыхъ мы будемъ говорить сейчасъ. Мы увидимъ при этомъ, что съ этимъ новымъ расширеніемъ понятія о числѣ дѣйствіе вычитанія сдѣлается возможнымъ во всѣхъ случаяхъ.

12. Понятіе о величинахъ, имѣющихъ направленіе. Приведемъ 2 задачи, изъ которыхъ будетъ ясно видно, о какихъ величинахъ мы теперь будемъ говорить.

Задача I. Извѣстно, что когда курьерскій поѣздъ Николаевской желѣзной дороги (соединяющей Москву съ Петроградомъ) находился на разстояніи 100 верстъ отъ станціи Бологое (эта станція лежитъ приблизительно посрединѣ между Москвой и Петроградомъ), тогда пассажирскій поѣздъ этой дороги былъ на разстояніи 50 верстъ отъ Бологова. На какомъ разстояніи находились тогда эти два поѣзда другъ отъ друга?

Легко замѣтить, что въ такомъ видѣ задача эта представляется не вполнѣ опредѣленной: въ ней не сказано, находились ли поѣзда по одну сторону отъ Бологова, напр., въ сторону по направленію къ Петрограду, или же они были по разнымъ сторонамъ отъ Бологова. Если первое, то разстояніе между поѣздами было, очевидно, 100—50, т.-е. 50 верстъ, а если второе, то разстояніе было 100 + 50, т.-е. 150 верстъ. Значитъ, для того чтобы эта задача была опредѣленною, не достаточно задать величину разстоянія отъ Бологова, но еще нужно указать, въ какомъ направленіи эти разстоянія надо считать отъ Бологова.

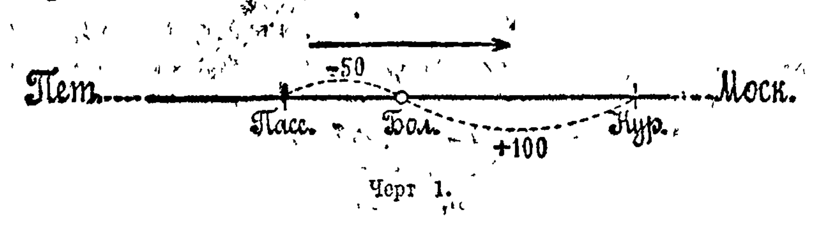
Мы имѣемъ здѣсь примѣръ величины, въ которой, кромѣ ея размѣра, можно разсматривать еще направленіе; это—разстояніе, считаемое по какой-нибудь линіи (напр., по желѣзной дорогѣ) отъ опредѣленнаго на ней мѣста (напр., отъ станціи Бологое). Разстояніе это можно считать и въ одномъ направленіи (напр., къ Москвѣ), и въ другомъ, противоположномъ (напр., къ Петрограду). Обыкновенныя (ариѳметическія) числа не достаточны для выраженія и размѣра, и направленія разстояній. Условимся въ подобныхъ случаяхъ поступать такъ.

Назовемъ какое-нибудь одно изъ двухъ направленій Николаевской дороги (напр., направленіе отъ Петрограда къ Москвѣ) положительнымъ, а противоположное направленіе (отъ Москвы къ Петрограду) отрицательнымъ; сообразно этому разстоянія, считаемыя въ положительномъ направленіи, будемъ называть положительными разстояніями, а разстоянія, считаемыя въ отрицательномъ направленіи, будемъ называть отрицательными. Первыя будемъ выражать числами со знакомъ + (или вовсе

безъ знака), а вторыя—числами со знакомъ —[1]). Такъ, если поѣздъ находится въ мѣстѣ, отстоящемъ на 100 верстъ отъ Бологова по направленію къ Москвѣ, то мы будемъ говорить, что его разстояніе отъ Бологова равно + 100 вер. (или просто 100 вер.); если же поѣздъ находится, положимъ, на 50 вер. отъ Бологова по направленію къ Петрограду, то мы скажемъ, что его разстояніе отъ Бологова равно — 50 вер. Здѣсь знаки + и —, конечно, не означаютъ дѣйствій сложенія и вычитанія, а только служатъ условно для обозначенія направленій.

Выразимъ теперь нашу задачу такъ: извѣстно, что когда курьерскій поѣздъ Николаевской желѣзной дороги находился отъ Бологова на разстояніи + 100 вер. (или просто 100 вер.), тогда пассажирскій поѣздъ этой дороги былъ отъ Бологова на разстояніи — 50 вер. Какъ велико было тогда разстояніе между этими поѣздами?

Теперь задача выражена вполнѣ точно, и отвѣтъ на нее получается опредѣленный (см. черт. 1, на которомъ стрѣлка указываетъ положительное направленіе дороги): поѣзда находились на разстояніи 100 + 50, т.-е. 150 верстъ.



Черт 1.

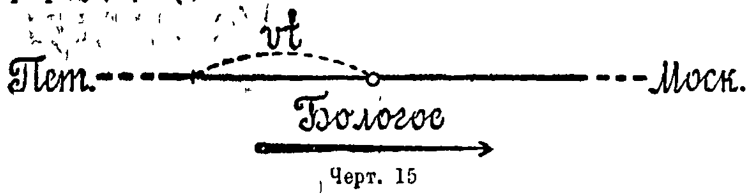
Задача 2. Термометръ въ полночь показывалъ 2 градуса, а въ полдень 5 градусовъ. На сколько градусовъ измѣнилась температура отъ полуночи до полудня?

И въ этой задачѣ условія выражены недостаточно полно; надо еще указать, 2 градуса т е п л а или 2 градуса х о л о д а показывалъ термометръ въ полночь, т.-е. вершина ртутнаго столбика въ термометрѣ была въ полночь на 2 дѣленія в ы ш е, или на 2 дѣленія н и ж е той черты, на которой стоитъ 0°; подобныя

---

[1]) Можно было бы взять и какіе-нибудь другіе знаки, но знаки + и — оказываются, какъ будетъ видно впослѣдствіи, очень удобными.

Отвѣтъ: на разстояніи vt верстъ отъ Бологова по направленію къ Петрограду (черт. 15).



Черт. 15

4) Въ полдень поѣздъ, двигавшійся отъ Москвы къ Петрограду со скоростью v верстъ въ часъ, проходилъ черезъ станцію Бологое. Опредѣлить мѣстонахожденіе этого поѣзда t часовъ до полудня.

Отвѣтъ: на разстояніи vt верстъ отъ Бологова по направленію къ Москвѣ (черт. 16).

vt

Пет. — Моск.

Бологое

Черт 16.

Введеніе въ алгебру отрицательныхъ чиселъ и правилъ дѣйствій надъ ними позволяетъ эти 4 отдѣльныя задачи выразить одною общею задачей и дать для нея одно общее рѣшеніе. Для этого предварительно условимся во-1-хъ, какое изъ двухъ возможныхъ направленій скорости поѣзда (отъ Петрограда къ Москвѣ, или наоборотъ) считать за положительное и какое за отрицательное; и, во 2-хъ, какой промежутокъ времени, слѣдующій за полуднемъ или предшествующій ему, считать положительнымъ и какой отрицательнымъ. Условимся, напр., скорость поѣзда при движеніи его отъ Петрограда къ Москвѣ считать положительной, а скорость при обратномъ движеніи — считать отрицательной; такимъ образомъ мы будемъ, напр. говорить: поѣздъ двигался со скоростью $+40$ верстъ въ часъ, или поѣздъ двигался со скоростью -35 верстъ въ часъ, разумѣя при этомъ, что въ первомъ случаѣ поѣздъ шелъ отъ Петрограда къ Москвѣ со скоростью 40 верстъ въ часъ, а во второмъ случаѣ онъ шелъ отъ Москвы къ Петрограду со скоростью 35 верстъ въ часъ. Далѣе условимся считать положительными всѣ тѣ промежутки времени, которые слѣдуютъ за полуднемъ, и отрицательными тѣ, которые предшествуютъ полудню; напр., мы будемъ говорить, что моментъ времени, въ который требуется опредѣлить мѣстонахожденіе поѣзда, отстоитъ отъ полудня на $+4$ часа, или моментъ этотъ отстоитъ отъ полудня на -3 часа, разумѣя при этомъ, что въ первомъ случаѣ моментъ времени надо считать позднѣе полудня на 4 часа, а во второмъ случаѣ его надо брать раньше полудня на 3 часа.

Допустимъ теперь, что въ задачѣ нашей буквы t и v будутъ означать не числа ариѳметическія, какъ мы прежде предполагали, а числа алгебраическія; напр., t можетъ означать въ задачѣ и $+4$, и -3; v можетъ означать и $+40$, и -35, и другія алгебраическія числа. Тогда мы можемъ сказать, что задача наша включаетъ въ себѣ всѣ 4 частные случая, указанные выше, и точнымъ отвѣтомъ на нее будетъ слѣдующій общій отвѣтъ

въ указанный моментъ времени поѣздъ находился на разстояніи отъ Бологова, равномъ vt верстъ,

если только подъ произведеніемъ алгебраическихъ чиселъ v и t условимся разумѣть произведеніе ихъ абсолютныхъ величинъ, взятое со знакомъ $+$ въ томъ случаѣ, когда оба сомножителя числа положительныя или оба — числа отрицательныя, и со знакомъ — въ томъ случаѣ, когда одинъ сомножитель число положительное, а другое — отрицательное. При этомъ условіи нашъ общій отвѣтъ (указанный выше) будетъ годенъ для всѣхъ частныхъ случаевъ Дѣйствительно

1) Пусть буквы v и t означаютъ положительныя числа, напр., $v = +40$ и $t = +3$. Эти заданія означаютъ, что поѣздъ шелъ по направленію отъ Петрограда къ Москвѣ со скоростью 40 верстъ въ часъ, и что требуется опредѣлить мѣстонахожденіе поѣзда въ моментъ времени, бывшій 3 часа послѣ полудня. Въ этомъ случаѣ искомое мѣсто лежитъ, какъ мы видѣли на 120 верстъ отъ Бологова по направленію къ Москвѣ (см. черт. 13) Значитъ, искомое разстояніе равно $+120$ вер Но согласно нашему условію, и произведеніе vt въ этомъ случаѣ даетъ. $(+40)(+3) = +120$. Слѣд. можно сказать, что искомое разстояніе равно произведенію vt верстъ.

2) Пусть v отрицательное число, напр, -40, а t положительное число напр., $+3$. Эти заданія надо понимать въ томъ смыслѣ, что поѣздъ шелъ отъ Москвы къ Петрограду, и надо опредѣлить его мѣсто въ моментъ бывшій 3 часа послѣ полудня. Мы видѣли, что тогда оно лежитъ на 120 верстъ отъ Бологова, по направленію къ Петрограду (см. черт. 14) т.-е. искомое разстояніе равно -120 вер. Но и произведеніе vt въ этомъ случаѣ даетъ. $(-40)(+3) = -120$; значитъ, опять также можно сказать что искомое разстояніе равно vt вер.

3) Пусть v положительное число, напр., $+40$, а t отрицательное число напр., -3. Эти заданія означаютъ, что поѣздъ шелъ отъ Петрограда къ Москвѣ, и требуется опредѣлить его мѣсто въ моментъ, бывшій 3 часа до полудня. Это мѣсто находится на 120 верстъ отъ Бологова по направленію къ Петрограду (см. черт 15); значитъ, искомое разстояніе равно -120 вер Но и произведеніе vt въ этомъ случаѣ даетъ: $(+40)(-3) = -120$; слѣдовательно, можно сказать, что искомое разстояніе равно vt верстъ.

4) Пусть, наконецъ, и v, и t означаютъ отрицательныя числа, напр $v = -40$, $t = -3$. Эти заданія означаютъ, что поѣздъ шелъ по направленію отъ Москвы къ Петрограду и что моментъ времени, въ который требуется опредѣлить мѣстонахожденіе поѣзда, былъ за 3 часа до полудня. Въ этомъ случаѣ, какъ мы видѣли, искомое мѣсто лежитъ на разстояніи 120 верстъ

отъ Бологова, по направленію къ Москвѣ (см черт 10), т. е. искомое разстояніе равно + 120 вер. Но произведеніе vt въ этомъ случаѣ даетъ $(-40)(-3) = +120$; значитъ, и теперь можно сказать, что искомое разстояніе равно vt верстъ.

30. Опредѣленіе произведенія. 1°. **Произведеніемъ двухъ относительныхъ чиселъ наз. произведеніе ихъ абсолютныхъ величинъ, взятое со знакомъ + въ томъ случаѣ, когда перемножаемыя числа имѣютъ одинаковые знаки, и со знакомъ — въ томъ случаѣ, когда они противоположныхъ знаковъ.**

Часть этого опредѣленія, касающаяся знаковъ, носитъ названіе **правила знаковъ**; его обыкновенно выражаютъ такъ: при **умноженіи** плюсъ на плюсъ и минусъ на минусъ даютъ плюсъ, а плюсъ на минусъ и минусъ на плюсъ даютъ минусъ; или короче: **при умноженіи двухъ чиселъ одинаковые знаки даютъ +, разные знаки даютъ —.**

Примѣры. $(+10)(+2) = +20$; вообще: $(+a)(+b) = +ab$;
$(-10)(+2) = -20$, $(-a)(+b) = -ab$;
$(+10)(-2) = -20$; $(+a)(-b) = -ab$;
$(-10)(-2) = +20$, $(-a)(-b) = +ab$;

Мы видимъ такимъ образомъ, что отъ умноженія на положительное число знакъ множимаго не измѣняется, а отъ умноженія на отрицательное число онъ перемѣняется на противоположный.

2°. Указанное опредѣленіе примѣняется и въ томъ случаѣ когда какой-нибудь сомножитель равенъ нулю: надо только помнить, что абсолютная величина числа 0 есть 0 и что выраженія $+0$, -0 и просто 0 равносильны. Такимъ образомъ $(+2).0 = +(2.0) = 0$, $(-2)\,0 = -(2.0) = -0 = 0$, $0.(+2) = +(0.2) = +0 = 0$ и пр.

Мы видимъ такимъ образомъ, что когда какой-нибудь сомножитель равенъ 0, то и произведеніе равно нулю. Если еще примемъ во вниманіе, что когда ни одинъ изъ сомножителей не равенъ 0, то произведеніе не можетъ равняться 0 (такъ какъ въ этомъ случаѣ абсолютная величина произведенія не равна 0) то мы можемъ высказать такое свойство произведенія:

Точно такъ же: $(\pm a).0=0$ и $0.(\pm a)=0$.

Возьмемъ теперь произведеніе, состоящее болѣе, чѣмъ изъ 2-хъ сомножителей, напр., такое:

$$(-a)(-b)(-c)(+d)\ldots$$

Изъ опредѣленія произведенія слѣдуетъ, что абсолютная величина этого произведенія равна $abcd$; знакъ же окажется $+$ или $-$, смотря по тому, въ четномъ числѣ, или въ нечетномъ входятъ въ произведеніе отрицательные сомножители. Если мы переставимъ сомножителей какъ-нибудь, напр., такъ:

$$(-c)(+d)(-b)(+a)\ldots,$$

то получимъ новое произведеніе, у котораго абсолютная величина этого $cdba\ldots$ и знакъ будетъ $+$ или $-$, смотря по тому, въ четномъ числѣ, или въ нечетномъ входятъ въ это новое произведеніе отрицательные сомножители. Такъ какъ $cdba\ldots=abcd\ldots$ (по перемѣстительному свойству произведенія ариѳметическихъ чиселъ), и число отрицательныхъ сомножителей отъ перемѣщенія ихъ не могло измѣниться, то у обоихъ произведеній абсолютная величина будетъ одна и та же и знаки одинаковы; слѣдовательно:

$$(+a)(-b)(-c)(+d)\ldots=(-c)(+d)(-b)(+a)\ldots$$

Равенство это остается въ силѣ и тогда, когда въ числѣ сомножителей есть равные нулю, такъ какъ въ этомъ случаѣ всѣ произведенія окажутся нулями.

2°. **Сочетательное свойство: произведеніе не измѣнится, если какихъ-либо сомножителей мы замѣнимъ ихъ произведеніемъ.**

Напримѣръ, вычисляя произведеніе $(-5)(+3)(-2)$, мы можемъ сомножителей $(+3)$ и (-2) замѣнить ихъ произведеніемъ -6.

Дѣйствительно, примѣняя перемѣстительное свойство, мы можемъ написать:

$$(-5)(+3)(-2)=(+3)(-2)(-5)=(-6)(-5)=$$
$$=(-5)(-6)=(-5)[(+3)(-2)].$$

Въ примѣненіи къ произведенію трехъ алгебраическихъ чиселъ abc мы можемъ сочетательное свойство выразить такъ:

$$abc=a(bc).$$

Читая это равенство справа налѣво, мы можемъ то же свойство высказать другими словами: **чтобы умножить какое нибудь число на произведеніе, достаточно умножить это число на перваго сомножителя, полученное произведеніе умножить на второго сомножителя и т. д.**

Слѣдствіе. Чтобы вычислить произведеніе нѣсколькихъ сомножителей, можно разбить ихъ на какія угодно группы произвести умноженіе въ каждой группѣ отдѣльно и полученныя произведенія перемножить.

3°. Распредѣлительное свойство: чтобы умножить алгебраическую сумму на относительное число, достаточно умножить на это число каждое слагаемое отдѣльно и полученныя произведенія сложить.

Ограничимся повѣркою этого свойства на нѣкоторыхъ примѣрахъ.

Примѣръ 1. $[(-2)+9+(-3)](+7)$.

Если вычислимъ сначала сумму, а потомъ сдѣлаемъ умноженіемъ, то найдемъ:

$$(+4)(+7)=+28.$$

Умножимъ теперь каждое слагаемое отдѣльно на $+7$ и сложимъ результаты:

$$(-2)(+7)=-14;\quad (+9)(+7)=+63;\quad (-3)(+7)=-21;$$
$$-14+63-21=+63-35=+28.$$

Мы получили то же самое число $+28$.

Примѣръ 2. $[8+(-2)+(-3)](-10)$.

Вычисливъ сумму и умноживъ ее на -10, находимъ $(+3)(-10)=-30$. Произведя умноженіе каждаго слагаемаго отдѣльно, получимъ то же самое число -30

$$8(-10)=-80;\quad (-2)(-10)=+20;\quad (-3)(-10)=+30;$$
$$-80+20+30=-30.$$

34. Доказательство распредѣлительнаго свойства. Требуется доказать, что каковы бы ни были алгебраическія числа a, b, c и m всегда:

$$(a+b+c)m=am+bm+cm.$$

Разсмотримъ особо слѣдующіе 4 случая:

1⁰, m есть положительное цѣлое число, напр., $m = +3$ или проще $m = 3$. Умножить какое-нибудь число на 3 значитъ повторить это число слагаемымъ 3 раза; поэтому

$$(a+b+c).3 = (a+b+c)+(a+b+c)+(a+b+c).$$

Чтобы прибавить сумму, достаточно прибавить каждое слагаемое одно за другимъ, поэтому написанное равенство можно переписать такъ:

$$(a+b+c).3 = a+b+c+a+b+c+a+b+c.$$

Въ правой части этого равенства сгруппируемъ слагаемыя такъ:

$$(a+b+c).3 = (a+a+a)+(b+b+b)+(c+c+c) = a.3+b.3+c.3.$$

Мы видимъ такимъ образомъ, что распредѣлительное свойство въ этомъ случаѣ дѣйствительно имѣетъ мѣсто.

2⁰, m есть положительная дробь, напр., $m = +\frac{7}{5}$ или проще: $m = \frac{7}{5}$. Умножить какое-нибудь число на $\frac{7}{5}$ значитъ найти $\frac{7}{5}$ этого числа, для чего достаточно найти сначала $\frac{1}{5}$ часть числа, а затѣмъ эту часть помножить на 7. Но $\frac{1}{5}$ отъ $a+b+c$ есть $\frac{a}{5}+\frac{b}{5}+\frac{c}{5}$, такъ какъ, умноживъ послѣднюю сумму на цѣлое число 5 (согласно распредѣлительному свойству доказанному для m цѣлаго), мы получимъ $a+b+c$.

$$\left(\frac{a}{5}+\frac{b}{5}+\frac{c}{5}\right)\cdot 5 = \frac{a}{5}\cdot 5+\frac{b}{5}\cdot 5+\frac{c}{5}\cdot 5 = a+b+c.$$

Если же $\frac{1}{5}$ отъ $a+b+c$ есть $\frac{a}{5}+\frac{b}{5}+\frac{c}{5}$, то $\frac{7}{5}$ отъ $a+b+c$ равны $\left(\frac{a}{5}+\frac{b}{5}+\frac{c}{5}\right)\cdot 7$, что, согласно доказанному въ 1-мъ случаѣ, составляетъ $\frac{a}{5}\cdot 7+\frac{b}{5}\cdot 7+\frac{c}{5}\cdot 7$. Выраженіе $\frac{a}{5}\cdot 7$ представляетъ собою пятую часть a повторенную слагаемымъ 7 разъ; значитъ, оно составляетъ $\frac{7}{5}$ числа a и потому его можно замѣнить произведеніемъ $a\cdot\frac{7}{5}$. То же самое можно сказать о выраженіяхъ $\frac{b}{5}\cdot 7$ и $\frac{c}{5}\cdot 7$. Поэтому мы можемъ написать:

$$(a+b+c)\cdot\frac{7}{5} = \left(\frac{a}{5}+\frac{b}{5}+\frac{c}{5}\right)\cdot 7 = a\cdot\frac{7}{5}+b\cdot\frac{7}{5}+c\cdot\frac{7}{5}$$

Такимъ образомъ, распредѣлительное свойство и для этого случая доказано.

3⁰, m есть отрицательное число, напр., $m = -7$. Умножить какое-нибудь число на -7 значитъ умножить это число на 7 и результатъ взять съ противоположнымъ знакомъ. Умноживъ $a+b+c$ на 7, получимъ

по доказанному $a.7+b.7+c.7$ Чтобы эту сумму взять съ противоположнымъ знакомъ, достаточно перемѣнить знакъ у каждаго слагаемаго суммы (§ 20, 8°). Но $-(a.7)=a.(-7), -(b.7)=b.(-7)$ и $-(c.7)=$ $=c.(-7)$; поэтому:

$$(a+b+c).(-7)=a.(-7)+b.(-7)+c.(-7)$$

4°. Наконецъ, свойство это остается вѣрнымъ и тогда, когда $m=0$, такъ какъ $(a+b+c).0=0$ и $a.0+b.0+c.0=0+0+0=0$.

Такимъ образомъ, каково бы ни было алгебраическое число m, всегда

$$(a+b+c)m=am+bm+cm.$$

Дѣленіе относительныхъ чиселъ.

35. Опредѣленіе. Дѣленіе относительныхъ чиселъ есть дѣйствіе (обратное умноженію), посредствомъ котораго по данному произведенію двухъ сомножителей и одному изъ этихъ сомножителей отыскивается другой. Такъ, раздѣлить $+10$ на -2 значитъ найти такое число x, чтобы произведеніе $(-2)x$ или — все равно — произведеніе $x(-2)$ равнялось $+10$; такое число есть, и при томъ только одно, именно -5, такъ какъ произведеніе числа -5 на -2 равно $+10$, а произведеніе какого-нибудь числа, отличнаго отъ -5, на -2 не можетъ составить $+10$.

36. Случаи, когда какое-нибудь данное число равно нулю. Такихъ случаевъ можетъ быть три, а именно:

1) Если дѣлимое равно 0, а дѣлитель не равенъ 0, то частное должно быть 0.

Въ самомъ дѣлѣ, раздѣлить 0 на какое-нибудь число a значитъ найти такое число, которое, умноженное на a, даетъ въ произведеніи 0. Такое число есть, и только одно, именно 0; значитъ, $0:a=0$.

2) Если дѣлимое равно 0 и дѣлитель равенъ 0, то частное можетъ равняться любому числу,

потому что всякое число, умноженное на 0, даетъ въ произведеніи 0; слѣд., частное $0:0$ равно любому числу.

3) Если дѣлимое не равно 0, а дѣлитель равенъ нулю, то частное не существуетъ,

потому что, какое бы число мы ни предположили въ частномъ, оно, умноженное на 0, даетъ въ произведеніи 0, а не какое-либо другое число; значитъ, частное $a:0$ невозможно, если a не равно 0.

Такимъ образомъ, если дѣлитель равенъ 0, то дѣленіе или невозможно (если дѣлимое не равно 0), или есть дѣйствіе неопредѣленное (если дѣлимое равно 0); поэтому случай этотъ мы вообще будемъ исключать.

37. Правило дѣленія. Чтобы раздѣлить одно относительное число на другое, дѣлятъ ихъ абсолютныя величины и результатъ берутъ со знакомъ +, когда дѣлимое и дѣлитель имѣютъ одинаковые знаки, и со знакомъ —, когда у дѣлимаго и дѣлителя знаки разные.

Такъ: $(+10):(+2)=+5$, потому что $(+2)(+5)=+10$
$(-10):(-2)=+5$, » » $(-2)(+5)=-10$.
$(-10)\ (+2)=-5$, » » $(+2)(-5)=-10$.
$(+10):(-2)=-5$, » » $(-2)(-5)=+10$.

Такимъ образомъ, правило знаковъ при дѣленіи остается то же самое, что и при умноженіи.

38. Другое правило дѣленія. Можно указать болѣе простое правило дѣленія, если предварительно условиться въ значеніи термина „обратное число".

Числомъ, обратнымъ данному числу a, называется такое число, которое получается отъ дѣленія +1 на a; другими словами, такое число, которое, умноженное на a, даетъ въ произведеніи +1. Такимъ образомъ:

числу $+3$ соотвѣтствуетъ обратное число $(+1):(+3)=+{}^1/_3$,
-3 » » » $(+1):(-3)=-{}^1/_3$,
$+{}^3/_8$ » » » $(+1):(+{}^5/_8)=+{}^8/_5$,
$-{}^5/_8$ » » » $(+1):(-{}^5/_8)=-{}^8/_5$.

Такъ какъ дѣленіе на нуль невозможно, то число 0 не имѣетъ себѣ обратнаго числа; всякому другому алгебраическому числу соотвѣтствуетъ свое обратное число (и только одно).

Теперь мы можемъ высказать другое правило дѣленія такъ: **чтобы раздѣлить одно число на другое, достаточно дѣлимое умножить на число, обратное дѣлителю.** Въ этомъ легко убѣдиться повѣркою; напр.: $(-10):(+5)=-2$ и $(-10)\cdot(+{}^1/_5)=-{}^{10}/_5=-2$ и т. п.

39. Нѣкоторыя свойства дѣленія. 1°. **Чтобы раздѣлить какое-нибудь число на произведеніе, достаточно раздѣлить**

это число на перваго сомножителя, полученное частное раздѣлить на второго сомножителя, это частное — на третьяго сомножителя и т. д.

Такъ: $(-40):[(+5)(-2)] = [(-40):(+5)](-2) =$
$= (-8):(-2) = +4.$

Вообще: $a:(bc) = (a:b):c.$

Чтобы убѣдиться въ вѣрности этого равенства, умножимъ предполагаемое частное на дѣлителя bc; если послѣ умноженія получимъ дѣлимое a, то это будетъ значить, что предполагаемое частное вѣрно. Вмѣсто того, чтобы умножить на bc, мы можемъ умножить на cb. Чтобы умножить какое-нибудь число на cb, можно умножить это число на c и затѣмъ результатъ умножить на b. Умноживъ предполагаемое частное $(a:b):c$ на c получимъ (по опредѣленію дѣленія) число $a:b$; умноживъ это число на b, получимъ дѣлимое a. Слѣд., предполагаемое частное вѣрно.

2°. Чтобы раздѣлить произведеніе на какое-нибудь число, достаточно раздѣлить на это число одного изъ сомножителей.

Такъ: $[(-20)(+15)]:(-5) = [(-20):(-5)](+15) =$
$= (+4)(+15) = +60,$

или $[(-20)(+15)]:(-5) = (-20)[(+15):(-5)] =$
$= (-20)(-3) = +60.$

Вообще: $(ab):c = (a:c)b,$

или $(ab):c = a(b:c)$

Чтобы убѣдиться въ вѣрности этихъ равенствъ, умножимъ каждое изъ этихъ предполагаемыхъ частныхъ на дѣлителя c; если послѣ умноженія получимъ дѣлимое ab, то заключимъ, что равенства вѣрны. Оба предполагаемыя частныя представляютъ собой произведеніе. Чтобы умножить произведеніе, достаточно умножить одного изъ сомножителей. Умноживъ на c въ первомъ предполагаемомъ частномъ сомножителя $(a:c)$, а во второмъ предполагаемомъ частномъ сомножителя $(b:c)$, мы получимъ въ окончательномъ результатѣ дѣлимое ab; значитъ оба равенства вѣрны.

ГЛАВА IV.

Раздѣленіе алгебраическихъ выраженій.

40. Предварительныя замѣчанія. 1) Въ дальнѣйшемъ изложеніи мы будемъ предполагать (если не сдѣлано особыхъ оговорокъ), что буквы, входящія въ алгебраическія выраженія. означаютъ числа алгебраическія, какъ положительныя, такъ и отрицательныя; буквы могутъ также означать и число 0, кромѣ случая, когда онѣ входятъ въ выраженіе въ качествѣ дѣлителя: дѣленіе на 0 мы вообще исключаемъ (§ 36).

2) Если случится, что въ какомъ-либо произведеніи есть нѣсколько сомножителей, выраженныхъ цыфрами, или нѣкоторые буквенные сомножители повторяются, то такія произведенія можно упростить, пользуясь сочетательнымъ свойствомъ произведенія (§ 33, 2°). Возьмемъ, напр., произведеніе: $a3aba(-2)cb$. Сгруппируемъ его сомножителей такъ: къ первой группѣ отнесемъ всѣхъ сомножителей, выраженныхъ цыфрами, ко второй группѣ—всѣхъ сомножителей, обозначенныхъ буквою a, къ третьей—всѣхъ сомножителей, обозначенныхъ буквою b, и т. д. Тогда мы получимъ выраженіе: $[3.(-2)](aaa)(bb)c$, которое можно написать проще такъ: $-6a^3b^2c$.

Въ дальнѣйшемъ мы всегда будемъ предполагать, что произведенія приведены къ такому упрощенному виду.

41. Раздѣленіе алгебраическихъ выраженій. Алгебраическое выраженіе назыв. раціональнымъ относительно какой-нибудь буквы, входящей въ это выраженіе, если буква эта не стоитъ подъ знакомъ извлеченія корня; въ противномъ случаѣ выраженіе наз. **ирраціональнымъ**.

Напр., выраженіе $3ab+2\sqrt{x}$ есть раціональное относительно a и b и ирраціональное относительно x.

Въ началѣ курса алгебры мы будемъ говорить только о такихъ алгебраическихъ выраженіяхъ, которыя раціональны относительно всѣхъ входящихъ въ нихъ буквъ (такія выраженія наз. просто раціональными, безъ добавленія: „относительно всѣхъ буквъ“).

(въ вычитаемомъ многочленѣ верхніе знаки поставлены тѣ, какіе были даны, а внизу они перемѣнены на обратные).

52. Раскрытіе скобокъ, передъ которыми стоитъ знакъ + или —. Пусть требуется раскрыть скобки въ выраженіи:

$$2a + (a - 3b + c) - (2a - b + 2c)$$

Это надо понимать такъ, что требуется надъ многочленами стоящими внутри скобокъ, произвести тѣ дѣйствія, которыя указываются знаками передъ скобками. Произведя эти дѣйствія по правиламъ сложенія и вычитанія, получимъ:

$$2a + a - 3b + c - 2a + b - 2c = a - 2b - c.$$

Изъ правилъ сложенія и вычитанія многочленовъ слѣдуетъ, что, раскрывая скобки, передъ которыми стоитъ +, мы не должны измѣнять знаковъ внутри скобокъ, а раскрывая скобки, передъ которыми стоитъ знакъ —, мы должны передъ всѣми членами стоящими внутри скобокъ, измѣнить знаки на противоположные.

Пусть еще требуется раскрыть скобки въ выраженіи:

$$10p - [3p + (5p - 10) - 4].$$

Для этого раскроемъ сначала внутреннія скобки, а затѣмъ внѣшнія:

$$10p - [3p + 5p - 10 - 4] = 10p - 3p - 5p + 10 + 4 = 2p = 14$$

Можно поступить и въ обратномъ порядкѣ, т.-е. сначала раскрыть внѣшнія скобки, а потомъ внутреннія. Раскрывая внѣшнія скобки, мы должны принимать многочленъ, стоящій во внутреннихъ скобкахъ, за одно число и поэтому не должны измѣнять знаковъ внутри этихъ скобокъ

$$10p - [3p + (5p - 10) - 4] = 10p - 3p - (5p - 10) + 4 =$$
$$= 10p - 3p - 5p + 10 + 4 = 2p + 14.$$

53. Заключеніе въ скобки. Для преобразованія многочлена часто бываетъ полезно заключить въ скобки совокупность нѣкоторыхъ его членовъ, при чемъ передъ скобками иногда желательно поставить +, т.-е. изобразить многочленъ въ видѣ суммы, а иногда —, т.-е. изобразить многочленъ въ видѣ разности. Пусть, напр., въ многочленѣ $a + b - c$ мы же-

лаемъ заключить въ скобки два послѣдніе члена, поставивъ передъ скобками знакъ $+$. Тогда пишемъ такъ:

$$a+b-c=a+(b-c),$$

т.-е. внутри скобокъ оставляемъ тѣ же знаки, какіе были въ данномъ многочленѣ. Что такое преобразованіе вѣрно, убѣдимся если раскроемъ скобки по правилу сложенія; тогда получимъ снова данный многочленъ.

Пусть въ томъ же многочленѣ $a+b-c$ требуется заключить въ скобки два послѣдніе члена, поставивъ передъ скобками знакъ минусъ. Тогда напишемъ такъ:

$$a+b-c=a-(-b+c)=a-(c-b),$$

т.-е. внутри скобокъ передъ всѣми членами перемѣняемъ знаки на противоположные. Что такое преобразованіе вѣрно, убѣдимся, если раскроемъ скобки по правилу вычитанія: тогда получимъ снова данный многочленъ.

ГЛАВА II.

Алгебраическое умноженіе.

54. Предварительное замѣчаніе. Такъ какъ показатель степени означаетъ, сколько разъ возвышаемое число надо повторить сомножителемъ, то онъ долженъ быть числомъ цѣлымъ и положительнымъ; возвышаемое же число можетъ быть какое угодно: цѣлое и дробное, положительное и отрицательное, и даже нуль.

55. Умноженіе степеней одного и того же числа. Пусть надо умножить a^4 на a^3; другими словами, требуется умножить a^4 на произведеніе трехъ сомножителей: aaa. Но чтобы умножить на произведеніе, достаточно умножить на перваго сомножителя, полученный результатъ на второго сомножителя и т. д. (§ 33, 2°); поэтому:

$$a^4a^3=a^4(aaa)=a^4aaa=aaaaaaa=a^{4+3}=a^7.$$

Вообще $a^m a^n = a^m(\underbrace{aaa...a}_{n\text{ разъ}}) = a^m\underbrace{aaa...a}_{n\text{ разъ}} = \underbrace{aaa...a}_{m\text{ разъ}}\cdot\underbrace{aaa...a}_{n\text{ разъ}} = a^{m+n}$

Правило. При умноженіи степеней одного и того же числа показатели ихъ складываются.

Примѣры. 1) $aa^6 = a^{1+6} = a^7$; 2) $m^{10}m^3 = m^{10+3} = m^{13}$;
3) $x^{2n}x^{3n} = x^{2n+3n} = x^{5n}$;
4) $p^{r-2}p^{r+2} = p^{(r-2)+(r+2)} = p^{r-2+r+2} = p^{2r}$.

56. Умноженіе одночленовъ. Пусть дано умножить $+3a^2b^3c$ на $-5a^3b^4d^2$. Такъ какъ одночленъ $-5a^3b^4d^2$ представляетъ собою произведеніе 4-хъ сомножителей: $-5.a^3.b^4.d^2$, то достаточно умножить множимое на перваго сомножителя -5, результатъ умножить на второго сомножителя a^3 и т. д. Значитъ:

$$(+3a^2b^3c)(-5a^3b^4d^2) = (+3a^2b^3c)(-5)a^3b^4d^2.$$

Скобки, въ которыя заключено множимое $+3a^2b^3c$, можно отбросить, такъ какъ отъ этого смыслъ выраженія не измѣнится; тогда мы получимъ произведеніе 8-и сомножителей.

$$(+3)a^2b^3c(-5)a^3b^4d^2.$$

Въ этомъ произведеніи соединимъ сомножителей въ такія группы (№ 33, 2°):

$$[(+3)(-5)](a^2a^3)(b^3b^4)cd^2.$$

Произведя умноженіе въ каждой группѣ, получимъ одночленъ $-15a^5b^7cd^2$.

Итакъ: $(+3a^2b^3c)(-5a^3b^4d^2) = -15a^5b^7cd^2$.

Правило. Чтобы перемножить одночлены, перемножаютъ ихъ коэффиціенты, складываютъ показателей одинаковыхъ буквъ, а тѣ буквы, которыя входятъ только въ одного сомножителя, переносятъ въ произведеніе съ ихъ показателями.

Примѣры. 1) $(0{,}7a^3xy^2)(3a^4x^2) = 2{,}1a^7x^3y^2$.
2) $(^1/_2mz^3)^2 = (^1/_2mz^3)(^1/_2mz^3) = {^1/_4}m^2z^6$
3) $(1{,}2a^rm^{n-1})(^3/_4am) = 0{,}9a^{r+1}m^n$;
4) $(-3{,}5x^2y)(^3/_4x^3) = -{^{21}/_8}x^5y$;
5) $(4a^nb^3)(-7ab^n) = -28a^{n+1}b^{n+3}$.

57. Умноженіе многочлена на какое-нибудь алгебраическое выраженіе. Пусть дано умножить

многочленъ $a+b-c$ на какое-нибудь алгебраическое выраженіе, которое мы обозначимъ одною буквою m.

$$(a+b-c)m.$$

Всякій многочленъ представляетъ собою сумму алгебраическихъ чиселъ. Но чтобы умножить сумму, достаточно умножить каждое слагаемое отдѣльно и результаты сложить; поэтому:

$$(a+b-c)m=[a+b+(-c)]\,m=am+bm+(-c)m.$$

Но $(-c)m=-cm$ и $+(-cm)=-cm$; значитъ:

$$(a+b-c)m=am+bm-cm.$$

Правило. **Чтобы умножить многочленъ на какое-нибудь алгебраическое выраженіе, достаточно умножить на это выраженіе каждый членъ многочлена и полученныя произведенія сложить.**

Такъ какъ произведеніе не измѣняется отъ перемѣны мѣстъ сомножителей, то это правило примѣнимо также и къ умноженію какого-либо алгебраическаго выраженія на многочленъ.

Примѣръ. $(3x^3-2ax^2+5a^2x-1)(-4a^2x^3)$.

Здѣсь алгебраическое выраженіе, на которое требуется умножать многочленъ, есть одночленъ; поэтому умноженіе членовъ многочлена на этотъ одночленъ мы можемъ производить по правилу умноженія одночленовъ:

$$(3x^3)(-4a^2x^3)=-12a^2x^6;\quad(-2ax^2)(-4a^2x^3)=+8a^3x^5;$$
$$(+5a^2x)(-4a^2x^3)=-20a^4x^4;\quad(-1)(-4a^2x^3)=+4a^2x^3.$$

Искомое произведеніе будетъ: $-12a^2x^6+8a^3x^5-20a^4x^4+4a^2x^3$.

Примѣры.

1) $(a^2-ab+b^2)3a=a^2(3a)-(ab)(3a)+b^2(3a)=3a^3-$
$-3a^2b+3ab^2$;

2) $(7x^3+{}^3/_4ax-0{,}3)(2{,}1a^2x)=(7x^3)(2{,}1a^2x)+$
$+({}^3/_4ax)(2{,}1a^2x)-(0{,}3)(2{,}1a^2x)=14{,}7a^2x^4+$
$+1{,}575a^3x^2-0{,}63a^2x$.

3) $(5x^{n-1}-3x^{n-2}+1)(-2x)=-10x^n+6x^{n-1}-2x$.

58. Умноженіе многочлена на многочленъ.

Пусть дано умножить: $(a+b-c)(d-e)$.

Разсматривая множимое, какъ одно алгебраическое выраженіе, мы можемъ сдѣлать умноженіе по правилу умноженія какого-нибудь алгебраическаго выраженія на многочленъ:

$$(a+b-c)(d-e)=(a+b-c)d-(a+b-c)e.$$

Разсматривая теперь выраженіе $a+b-c$, какъ многочленъ, можемъ примѣнить правило умноженія многочлена на какое-нибудь алгебраическое выраженіе:

$$(a+b-c)(d-e)=ad+bd-cd-(ae+be-ce).$$

Наконецъ, раскрывъ скобки по правилу вычитанія, получимъ:

$$(a+b-c)(d-e)=ad+bd-cd-ae-be+ce.$$

Правило. **Чтобы умножить многочленъ на многочленъ, умножаютъ каждый членъ множимаго на каждый членъ множителя и полученныя произведенія складываютъ.**

Примѣръ. $(a^2-5ab+b^2-3)(a^3-3ab^2+b^3)$.

Умножимъ сначала всѣ члены множимаго на 1-й членъ множителя.

$$(a^2-5ab+b^2-3)a^3=a^5-5a^4b+a^3b^2-3a^3.$$

Затѣмъ умножимъ всѣ члены множимаго на 2-й членъ множителя.

$$(a^2-5ab+b^2-3)(-3ab^2)=-3a^3b^2+15a^2b^3-3ab^4+9ab^2.$$

Далѣе умножимъ всѣ члены множимаго на 3-й членъ множителя:

$$(a^2-5ab+b^2-3)(+b^3)=a^2b^3-5ab^4+b^5-3b^3.$$

Наконецъ, сложимъ полученныя произведенія и сдѣлаемъ приведеніе подобныхъ членовъ; окончательный результатъ будетъ:

$$a^5-5a^4b-2a^3b^2-3a^3+16a^2b^3-8ab^4+9ab^2+b^5-3b^3 \text{ [1]}.$$

[1] Чтобы при умноженіи многочленовъ не пропустить ни одного произведенія, полезно всегда держаться одного какого-нибудь порядка умноженія; напр., какъ это мы сейчасъ дѣлали, умножить сначала всѣ члены множимаго на 1-й членъ множителя, затѣмъ всѣ члены множимаго на 2-й членъ множителя и т. д.

Примѣры. 1) $(a-b)(m-n-p)=am-bm-an+$
$+bn-ap+bp$;
2) $(x^2-y^2)(x+y)=x^3-xy^2+x^2y-y^3$;
3) $(3an+2n^2-4a^2)(n^2-5an)=3an^3+$
$+2n^4-4a^2n^2-15a^2n^2-10an^3+20a^3n=$
$=7an^3+2n^4-19a^2n^2+20a^3n$;
4) $(2a^2-3)^2=(2a^2-3)(2a^2-3)=(2a^2)^2-$
$-3(2a^2)-(2a^2)3+9=4a^4-6a^2-6a^2+$
$+9=4a^4-12a^2+9$.

ГЛАВА III.

Умноженіе расположенныхъ многочленовъ.

59. Опредѣленіе. **Расположить многочленъ по степенямъ какой-нибудь одной буквы значитъ, если возможно, написать его члены въ такомъ порядкѣ, чтобы показатели этой буквы увеличивались или уменьшались отъ перваго члена къ послѣднему.**

Такъ многочленъ $1+2x+3x^2-x^3-{}^1/_2x^4$ **расположенъ по возрастающимъ степенямъ** буквы x. Тотъ же многочленъ будетъ расположенъ **по убывающимъ степенямъ** буквы x, если члены его напишемъ въ обратномъ порядкѣ:

$$-{}^1/_2x^4-x^3+3x^2+2x+1.$$

Буква, по которой расположенъ многочленъ, наз. **главной** его буквой. Когда члены многочлена содержатъ нѣсколько буквъ и ни одной изъ нихъ не приписывается какого-либо особеннаго значенія, то безразлично, какую изъ нихъ считать за главную.

Членъ, содержащій главную букву съ наибольшимъ показателемъ, наз. **высшимъ** членомъ многочлена; членъ, содержащій главную букву съ наименьшимъ показателемъ, или не содержащій ея вовсе, наз. **низшимъ** членомъ многочлена.

Чтобы расположить такой многочленъ, въ которомъ есть нѣсколько членовъ съ одинаковыми показателями главной буквы, надо заключить эти члены въ скобки и вынести за скобку общимъ множителемъ главную букву съ ея показателемъ. Напр.:

$$2ax^3-4a^2x^2-{}^1/_2ax^2-8a^3x+1=$$
$$=2ax^3-(4a^2x^2+{}^1/_2ax^2)-8a^3x+1=$$
$$=2ax^3-(4a^2+{}^1/_2a)x^2-8a^3x+1.$$

Здѣсь двучленъ $-(4a^2+\frac{1}{2}a)$ должно разсматривать, какъ коэффиціентъ при x^2.

60. Умноженіе расположенныхъ многочленовъ всего удобнѣе производить такъ, какъ будетъ указано на слѣдующихъ примѣрахъ.

Примѣръ I. Умножить $3x-5+7x^2-x^3$ на $2-8x^2+x$

$$
\begin{array}{llr}
 & -x^3+7x^2+3x-5 & \\
 & \quad -8x^2+x+2 & \\
\hline
 & 8x^5-56x^4-24x^3+40x^2 & \text{.....произведеніе множимаго на } -8x^2 \\
 & \quad -x^4+7x^3+3x^2-5x & \text{...произведеніе множимаго на } +x. \\
 & \qquad -2x^3+14x^2+6x-10 & \text{произведеніе множимаго на } +2. \\
\hline
 & 8x^5-57x^4-19x^3+57x^2+x-10 & \text{полное произведеніе.}
\end{array}
$$

Расположивъ оба многочлена по убывающимъ степенямъ одной и той же буквы, пишутъ множителя подъ множимымъ и подъ множителемъ проводятъ черту. Умножаютъ всѣ члены множимаго на 1-й членъ множителя (на $-8x^2$) и полученное частное произведеніе пишутъ подъ чертою. Умножаютъ затѣмъ всѣ члены множимаго на 2-й членъ множителя (на $+x$) и полученное второе частное произведеніе пишутъ подъ первымъ частнымъ произведеніемъ такъ, чтобы подобные члены стояли подъ подобными. Такъ же поступаютъ при умноженіи всѣхъ членовъ множимаго на слѣдующіе члены множителя. Подъ послѣднимъ частнымъ произведеніемъ проводятъ черту; подъ этою чертою пишутъ полное произведеніе, складывая всѣ частныя произведенія.

Можно также оба многочлена расположить по возрастающимъ степенямъ главной буквы и затѣмъ производить умноженіе въ томъ порядкѣ, какъ было указано

$$
\begin{array}{lr}
-5+3x+7x^2-x^3 & \\
\quad 2+x-8x^2 & \\
\hline
-10+6x+14x^2-2x^3 & \text{.......произведеніе на } 2. \\
\quad -5x+3x^2+7x^3-x^4 & \text{....произведеніе на } +x. \\
\qquad +40x^2-24x^3-56x^4+8x^5 & \text{. произведеніе на } -8x^2. \\
\hline
-10+x+57x^2-19x^3-57x^4+8x^5 & \text{. полное произведеніе.}
\end{array}
$$

Удобство этихъ пріемовъ, очевидно, состоитъ въ томъ, что при этомъ подобные члены располагаются другъ подъ другомъ и, слѣдовательно, ихъ не нужно отыскивать.

Примѣръ 2. Умножить a^3+5a-3 на a^2+2a-1.

Въ этихъ многочленахъ не достаетъ нѣкоторыхъ промежуточныхъ членовъ; въ такихъ случаяхъ на мѣстахъ этихъ членовъ полезно оставлять пустыя пространства для болѣе удобнаго подписыванія подобныхъ членовъ:

$$\begin{array}{rrrrrr}
a^3 & » & +5a & -3 & & \\
 & a^2 & +2a & -1 & & \\
\hline
a^5 & & +5a^3 & -3a^2 & & \\
 & +2a^4 & & +10a^2 & -6a & \\
 & & -a^3 & & -5a & +3 \\
\hline
a^5 & +2a^4 & +4a^3 & +7a^2 & -11a & +3.
\end{array}$$

61. Высшій и низшій члены произведенія. Изъ разсмотрѣнія примѣровъ умноженія расположенныхъ многочленовъ слѣдуетъ:

высшій членъ произведенія равенъ произведенію высшаго члена множимаго на высшій членъ множителя;

низшій членъ произведенія равенъ произведенію низшаго члена множимаго на низшій членъ множителя.

Остальные члены произведенія могутъ получиться отъ соединенія нѣсколькихъ подобныхъ членовъ въ одинъ. Можетъ даже случиться, что въ произведеніи, послѣ приведенія въ немъ подобныхъ членовъ, всѣ члены уничтожатся кромѣ высшаго и низшаго, какъ это видно изъ слѣдующаго примѣра:

$$\begin{array}{rrrrrr}
x^4 & +ax^3 & +a^2x^2 & +a^3x & +a^4 & \\
 & x & -a & & & \\
\hline
x^5 & +ax^4 & +a^2x^3 & +a^3x^2 & +a^4x & \\
 & -ax^4 & -a^2x^3 & -a^3x^2 & -a^4x & -a^5 \\
\hline
x^5 & » & » & » & » & -a^5 = x^5 - a^5
\end{array}$$

62. Число членовъ произведенія. Пусть во множимомъ 5, а во множителѣ 3 члена. Умноживъ каждый членъ множимаго на 1-й членъ множителя, мы получимъ 5 членовъ произведенія: умноживъ каждый членъ множимаго на 2-й членъ

множителя, получимъ еще 5 членовъ произведенія, и т. д.; значитъ, всѣхъ членовъ произведенія будетъ 5. 3, т.-е. 15. Вообще, **число членовъ произведенія, до соединенія въ немъ подобныхъ членовъ, равно произведенію числа членовъ множимаго на число членовъ множителя.**

Такъ какъ высшій и низшій члены произведенія не могутъ **имѣть подобныхъ членовъ, а всѣ прочіе** могутъ уничтожиться, **то наименьшее число членовъ произведенія, послѣ** приведенія **въ немъ подобныхъ членовъ, равно 2.**

ГЛАВА IV.

Нѣкоторыя формулы умноженія двучленовъ.

63. Полезно обратить особое вниманіе на слѣдующіе 5 случаевъ умноженія двучленовъ и запомнить окончательныя формулы.

I. Произведеніе суммы двухъ чиселъ на ихъ разность равно разности квадратовъ тѣхъ же чиселъ; т.-е.

$$(a+b)\ (a-b)=a^2-b^2.$$

Дѣйствительно: $(a+b)(a-b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$

Напр., $25\ .\ 15=(20+5)(20-5)=20^2-5^2=400-25=375$.

II. **Квадратъ суммы двухъ чиселъ равенъ квадрату перваго числа, плюсъ удвоенное произведеніе перваго числа на второе, плюсъ квадратъ второго числа;** т.-е.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Дѣйствительно: $(a+b)^2=(a+b)\ (a+b)=a^2+\underline{ab}+\underline{ab}+b^2=$
$=a^2+2ab+b^2$.

Напр., $67^2=(60+7)^2=60^2+2.60.7+7^2=3600+840+49=4489$.

III. **Квадратъ разности двухъ чиселъ равенъ квадрату перваго числа, минусъ удвоенное произведеніе перваго числа на второе, плюсъ квадратъ второго числа;** т.-е.

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

Дѣйствительно: $(a-b)^2=(a-b)\ (a-b)=a^2-\underline{ab}-\underline{ab}+b^2=$
$=a^2-2ab+b^2$.

Напр., $19^2=(20-1)^2=20^2-2\ .\ 20\ .\ 1+1^2=400-40+1=361$.

IV. Кубъ суммы двухъ чиселъ равенъ кубу перваго числа, плюсъ утроенное произведеніе квадрата перваго числа на второе, плюсъ утроенное произведеніе перваго числа на квадратъ второго, плюсъ кубъ второго числа; т.-е.

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Дѣйствительно: $(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=$
$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Напр., $12^3=(10+2)^3=10^3+3.10^2.2+3.10.2^2+2^3=$
$=1000+600+120+8=1728.$

V. Кубъ разности двухъ чиселъ равенъ кубу перваго числа, минусъ утроенное произведеніе квадрата перваго числа на второе, плюсъ утроенное произведеніе перваго числа на квадратъ второго, минусъ кубъ второго числа; т.-е.

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

Дѣйствительно: $(a-b)^3=(a-b)^2(a-b)=(a^2-2ab+b^2)(a-b)=$
$=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$

Напр., $18^3=(20-2)^3=20^3-3\ .\ 20^2\ .\ 2+3\ .\ 20\ .\ 2^2-2^3=$
$=8000-2400+240-8=5832.$

Замѣчанія. Формулы III и V могутъ быть получены соотвѣтственно изъ формулъ II и IV (и наоборотъ), если въ послѣднихъ формулахъ замѣнимъ b на $-b$. Дѣйствительно:

$$[a+(-b)]^2=a^2+2a(-b)+(-b)^2=a^2+(-2ab)+b^2=a^2-2ab+b^2;$$
$$[a+(-b)]^3=a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3=a^3+(-3a^2b)+$$
$$+3ab^2+(-b^3)=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

Условившись всякій двучленъ разсматривать, какъ сумму, мы можемъ 4 указанныя формулы свести къ слѣдующимъ двумъ:

Квадратъ двучлена равенъ квадрату перваго члена, плюсъ удвоенное произведеніе перваго члена на второй, плюсъ квадратъ второго члена.

Кубъ двучлена равенъ кубу перваго члена, плюсъ утроенное произведеніе квадрата перваго члена на второй, плюсъ утроенное произведеніе перваго члена на квадратъ второго, плюсъ кубъ второго члена.

64. Примѣненія. При помощи этихъ формулъ можно иногда производить умноженіе многочленовъ проще, чѣмъ обыкновеннымъ путемъ, какъ это видно изъ слѣдующихъ примѣровъ:

1) $(4a^3-1)^2=(4a^3)^2-2(4a^3)\,.\,1+1^2=16a^6-8a^3+1;$

2) $(x+y)(y-x)=(y+x)(y-x)=y^2-x^2;$

3) $\left(\frac{1}{3}x^{2m-1}y^3+\frac{3}{4}x^{m+1}y\right)^2=\left(\frac{1}{3}x^{2m-1}y^3\right)^2+2\left(\frac{1}{3}x^{2m-1}y^3\right)$

$\left(\frac{3}{4}x^{m+1}y\right)+\left(\frac{3}{4}x^{m+1}y\right)^2=\frac{1}{9}x^{4m-2}y^6+\frac{1}{2}x^{3m}y^4+\frac{9}{16}x^{2m+2}y^2;$

4) $(x+y+1)(x-y+1)=[(x+1)+y][(x+1)-y]=(x+1)^2-y^2=$
$=x^2+2x+1-y^2,$

5) $(a-b+c)(a+b-c)=[a-(b-c)][a+(b-c)]=a^2-(b-c)^2=$
$=a^2-(b^2-2bc+c^2)=a^2-b^2+2bc-c^2;$

6) $(2a+1)^3=(2a)^3+3(2a)^2 1+3(2a)1^2+1^3=8a^3+12a^2+6a+1;$

7) $(1-3x^2)^3=1^3-3\,.\,1^2\,.\,3x^2+3\,.\,1\,.\,(3x^2)^2-(3x^2)^3=1-9x^2+$
$+27x^4-27x^6.$

ГЛАВА V.

Алгебраическое дѣленіе.

65. Дѣленіе степеней одного и того же числа. Пусть дано раздѣлить $a^8:a^5$. Такъ какъ дѣлимое равно дѣлителю, умноженному на частное, а при умноженіи показатели одинаковыхъ буквъ складываются, то $a^8:a^5=a^{8-5}=a^3$; дѣйствительно: $a^8=a^5\,.\,a^3$.

Правило. При дѣленіи степеней одного и того же числа показатель дѣлителя вычитается изъ показателя дѣлимаго.

66. Нулевой показатель. Когда показатель дѣлителя равенъ показателю дѣлимаго, то частное равно 1; напр.: $a^5:a^5=1$, потому что $a^5=a^5\cdot 1$. Условимся производить вычитаніе показателей и въ этомъ случаѣ; тогда получимъ въ частномъ букву съ нулевымъ показателемъ: $a^5:a^5=a^{5-5}=a^0$. Показатель 0 не имѣетъ того значенія, которое мы придавали показателямъ раньше, такъ какъ нельзя повторить число

множителемъ 0 разъ. Мы условимся подъ видомъ a^0 разумѣть частное отъ дѣленія одинаковыхъ степеней числа a, и такъ какъ это частное равно 1, то мы должны принять, что $a^0=1$. Въ такомъ смыслѣ обыкновенно и разсматриваютъ это выраженіе.

Замѣчаніе. Букву съ нулевымъ показателемъ, какъ равную единицѣ, мы можемъ приписать ко всякому выраженію въ видѣ множителя или дѣлителя; напр., располагая многочленъ $3x-4x^2+7+2x^3$ по степенямъ буквы x, мы можемъ членъ $+7$ разсматривать, какъ $+7x^0$ и писать: $2x^3-4x^2+3x+7x^0$.

67. Дѣленіе одночленовъ. Пусть дано раздѣлить $12a^7b^5c^2d^3$ на $4a^4b^3d^3$. По опредѣленію дѣленія частное, умноженное на дѣлителя, должно составить дѣлимое. Но при умноженіи одночленовъ коэффиціенты ихъ перемножаются, показатели одинаковыхъ буквъ складываются, а тѣ буквы, которыя входятъ только въ одного сомножителя, переносятся въ произведеніе съ ихъ показателями (§ 56). Значитъ, у искомаго частнаго коэффиціентъ долженъ быть 12 : 4, т.-е. 3, показатели буквъ a и b получатся вычитаніемъ изъ показателей тѣхъ же буквъ дѣлителя; буква c должна перейти въ частное со своимъ показателемъ, а буква d совсѣмъ не должна войти въ частное, или войдетъ въ него съ показателемъ 0. Такимъ образомъ:

$$12a^7b^5c^2d^3 : 4a^4b^3d^3 = 3a^3b^2c^2d^0 = 3a^3b^2c^2.$$

Что найденное частное вѣрно, можно убѣдиться повѣркой: умноживъ $3a^3b^2c^2$ на $4a^4b^3d^3$, получимъ дѣлимое.

Правило. Чтобы раздѣлить одночленъ на одночленъ, коэффиціентъ дѣлимаго дѣлятъ на коэффиціентъ дѣлителя, изъ показателей буквъ дѣлимаго вычитаютъ показателей тѣхъ же буквъ дѣлителя и переносятъ въ частное, безъ измѣненія показателей, тѣ буквы дѣлимаго, которыхъ нѣтъ въ дѣлителѣ

Примѣры.

1) $3m^3n^4x : 4m^2nx = {}^3/_4 mn^3x^0 = {}^3/_4 mn^3$,

2) $-ax^ny^m : {}^3/_4 axy^2 = -{}^4/_3 a^0x^{n-1}y^{m-2} = -{}^4/_3 x^{n-1}y^{m-2}$;

3) $-0{,}6a^3(x+y)^4 : -2{,}5a(x+y)^2 = 0{,}24a^2(x+y)^2$.

68. Невозможное дѣленіе. Когда частное отъ дѣленія одночленовъ не можетъ быть выражено одночленомъ, то говорятъ, что дѣленіе невозможно. Это бываетъ въ двухъ случаяхъ:

1) когда въ дѣлителѣ есть буквы, какихъ нѣтъ въ дѣлимомъ;

2) когда показатель какой-нибудь буквы дѣлителя больше показателя той же буквы въ дѣлимомъ.

Пусть, напр., дано раздѣлить $4a^2b$ на $2ac$. Всякій одночленъ, умноженный на $2ac$, даетъ въ произведеніи такой одночленъ, который содержитъ букву c; такъ какъ въ нашемъ дѣлимомъ нѣтъ этой буквы, то, значитъ, частное не можетъ быть выражено одночленомъ.

Также невозможно дѣленіе $10a^3b^2 : 5ab^3$, потому что всякій одночленъ, умноженный на $5ab^3$, даетъ въ произведеніи такой одночленъ, который содержитъ букву b съ показателемъ 3 или большимъ 3, тогда какъ въ нашемъ дѣлимомъ эта буква стоитъ съ показателемъ 2.

69. Дѣленіе многочлена на какое-нибудь алгебраическое выраженіе. Пусть требуется раздѣлить многочленъ $a+b-c$ на какое-нибудь алгебраическое выраженіе, которое мы обозначимъ буквою m. Искомое частное можно выразить такъ:

$$(a+b-c) : m = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m}$$

Чтобы убѣдиться въ вѣрности этого равенства, умножимъ предполагаемое частное на дѣлителя m; если въ произведеніи получимъ дѣлимое, то частное вѣрно. Примѣняя правило умноженія многочлена на какое-нибудь алгебраическое выраженіе, получимъ:

$$\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}\right)m = \frac{a}{m}\cdot m + \frac{b}{m}\cdot m - \frac{c}{m}\cdot m = a+b-c.$$

Значитъ, предполагаемое частное вѣрно.

Правило. Чтобы раздѣлить многочленъ на какое нибудь алгебраическое выраженіе, достаточно раздѣлить на это выраженіе каждый членъ многочлена и полученныя частныя сложить.

Когда алгебраическое выраженіе, на которое дѣлится многочленъ, есть одночленъ, то дѣленіе членовъ многочлена на этотъ одночленъ производятъ по правилу дѣленія одночленовъ.

Примѣры. 1) $(20a^3x^2-8a^2x^3-ax^4+3a^3x^3):4ax^2=$

$$=5a^2-2ax-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}a^2x;$$

2) $(14m^p-21m^{p-1}):-7m^2=-2m^{p-2}+3m^{p-3};$

3) $\left(\frac{1}{2}x^3y^3-0,3x^2y^4+1\right):2x^2y^2=$

$$=\frac{1}{4}xy-0,15y^2+\frac{1}{2x^2y^2}.$$

70. Замѣчаніе. Частное отъ дѣленія одночлена на многочленъ не можетъ быть выражено ни одночленомъ, ни многочленомъ. Дѣйствительно, если предположимъ, что частное $a:(b+c-d)$ равно какому-нибудь одночлену или многочлену, то произведеніе этого частнаго на многочленъ $b+c-d$ дало бы тоже многочленъ, а не одночленъ a, какъ требуется дѣленіемъ.

71. Дѣленіе многочлена на многочленъ. Частное отъ дѣленія многочлена на многочленъ можетъ быть выражено въ видѣ цѣлаго алгебраическаго выраженія лишь въ рѣдкихъ случаяхъ. Въ этомъ мы убѣдимся, когда разсмотримъ на примѣрѣ, какъ можно находить это частное.

Примѣръ. $(5x^2-19x^3+17x+6x^4-4):(1-5x+3x^2)$.

Напишемъ оба многочлена по убывающимъ степенямъ буквы x и расположимъ дѣйствіе такъ, какъ оно располагается при дѣленіи цѣлыхъ чиселъ:

$$\begin{array}{lrl}
 & 6x^4-19x^3+5x^2+17x-4 & \big|\ \underline{3x^2-5x+1} \\
 & \underline{\pm 6x^4\mp 10x^3\pm 2x^2\qquad\qquad} & \ \ 2x^2-3x-4 \\
\text{1-й остатокъ} \ \text{„} & -9x^3+3x^2+17x-4 & \\
 & \underline{\pm 9x^3\pm 15x^2\mp 3x\quad} & \\
\text{2-й остатокъ} \ \text{„} & -12x^2+20x-4 & \\
 & \underline{\pm 12x^2\pm 20x\mp 4} & \\
\text{3-й остатокъ...} & 0 &
\end{array}$$

Предположимъ, что искомое частное будетъ какой-нибудь многочленъ, и что члены этого многочлена расположены тоже по убывающимъ степенямъ буквы x. Чтобы найти этотъ многочленъ, примемъ во вниманіе, что дѣлимое должно равняться

произведенію дѣлителя на частное. Изъ умноженія расположенныхъ многочленовъ извѣстно (§ 61), что высшій членъ произведенія получается отъ умноженія высшаго члена множимаго на высшій членъ множителя. Въ дѣлимомъ высшій членъ есть первый, въ дѣлителѣ и частномъ высшіе члены тоже первые. Значитъ, для 1-го члена частнаго мы можемъ взять такой одночленъ, который, будучи умноженъ на 1-ый членъ дѣлителя, образуетъ 1-й членъ дѣлимаго; поэтому: чтобы найти первый членъ частнаго, достаточно раздѣлить первый членъ дѣлимаго на первый членъ дѣлителя. Раздѣливъ, находимъ первый членъ частнаго $2x^2$. Пишемъ его подъ чертою.

Умножимъ всѣ члены дѣлителя на первый членъ частнаго и полученное произведеніе вычтемъ изъ дѣлимаго. Для этого напишемъ его подъ дѣлимымъ такъ, чтобы подобные члены стояли подъ подобными, и у всѣхъ членовъ вычитаемаго перемѣнимъ знаки на обратные Получимъ послѣ вычитанія первый остатокъ. Если бы этотъ остатокъ оказался равнымъ нулю, то это значило бы, что въ частномъ никакихъ другихъ членовъ, кромѣ найденнаго перваго, нѣтъ, т.-е. что частное одночленъ. Если же, какъ въ нашемъ примѣрѣ, первый остатокъ не нуль, то примемъ во вниманіе, что дѣлимое можно разсматривать, какъ сумму произведеній дѣлителя на каждый членъ частнаго. Мы вычли изъ дѣлимаго произведеніе дѣлителя на 1-й членъ частнаго; слѣд., 1-й остатокъ долженъ представлять собою произведеніе дѣлителя на 2-й, на 3 й и слѣдующіе члены частнаго. Высшій членъ въ остаткѣ есть 1-й; высшій членъ дѣлителя тоже 1-й, высшій членъ въ частномъ (не считая 1-го) есть 2-й членъ. Значитъ, для 2-го члена частнаго мы можемъ принять такой одночленъ, который, будучи умноженъ на 1-й членъ дѣлителя, образуетъ 1-й членъ остатка; поэтому. чтобы найти 2-й членъ частнаго, достаточно раздѣлить первый членъ перваго остатка на первый членъ дѣлителя. Раздѣливъ, находимъ второй членъ частнаго $-3x$. Пишемъ его подъ чертою.

Умножимъ дѣлителя на 2-й членъ частнаго и полученное произведеніе вычтемъ изъ 1-го остатка. Получимъ второй остатокъ. Если этотъ остатокъ равенъ нулю, то дѣленіе окончено; если же, какъ въ нашемъ примѣрѣ, 2-й остатокъ не равенъ

пулю, то примемъ во вниманіе, что второй остатокъ есть сумма произведеній дѣлителя на 3-й, на 4-й и слѣдующіе члены частнаго. Такъ какъ изъ этихъ членовъ высшій есть 3-й, то, подобно предыдущему, 3-й членъ частнаго найдемъ, если первый членъ 2-го остатка раздѣлимъ на первый членъ дѣлителя. Раздѣливъ, находимъ —4. Умноживъ дѣлителя на —4 и вычтя произведеніе изъ остатка, получимъ 3-й остатокъ. Въ нашемъ примѣрѣ этотъ остатокъ оказался нулемъ; это показываетъ, что въ частномъ другихъ членовъ, кромѣ найденныхъ, не можетъ быть. Если бы 3-й остатокъ былъ не 0, то, подобно предыдущему, надо было бы, если возможно, дѣлить 1-й членъ этого остатка на 1-й членъ дѣлителя; отъ этого получился бы 4-й членъ частнаго, и т. д.

Подобнымъ же образомъ можно выполнить дѣленіе, расположивъ оба многочлена по возрастающимъ степенямъ главной буквы:

$$\begin{array}{l|l} -4+17x+5x^2-19x^3+6x^4 & 1-5x+3x^2 \\ \cline{2-2} \mp 4 \pm 20x \mp 12x^2 & -4-3x+2x^2 \\ \hline \quad ,, \; -3x+17x^2-19x^3 & \\ \quad \mp 3x \pm 15x^2 \mp 9x^3 & \\ \hline \qquad 2x^2-10x^3+6x^4 & \\ \qquad \pm 2x^2 \mp 10x^3 \pm 6x^4 & \\ \hline \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

При такомъ расположеніи первые члены въ дѣлимомъ, дѣлителѣ, частномъ и остаткахъ будутъ низшіе. Такъ какъ низшій членъ произведенія (дѣлимаго) долженъ равняться произведенію низшаго члена множимаго (дѣлителя) на низшій членъ множителя (частнаго), то ходъ разсужденій и порядокъ дѣйствія остаются тѣ же самые, какъ и въ томъ случаѣ, когда дѣлимое и дѣлитель расположены по убывающимъ степенямъ главной буквы.

72. Вотъ еще нѣкоторые примѣры дѣленія многочленовъ:

$$1)\quad \begin{array}{l|l} 28x^4-13cx^3-26c^2x^2+15c^3x & 7x^2+2cx-5c^2 \\ \cline{2-2} \quad ,, \; -8cx^3+20c^2x^2 & 4x^2-3cx \\ \hline \quad -21cx^3-6c^2x^2+15c^3x & \\ \qquad ,, \; +6c^2x^2-15c^3x & \\ \hline \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Мы здѣсь не писали произведенiй 1-го члена дѣлителя на 1-й, 2-й и т. д. члены частнаго, потому что эти произведенiя всегда равны тѣмъ членамъ, подъ которыми они подписываются, и при вычитанiи всегда сокращаются. Обыкновенно такъ и дѣлаютъ. Кромѣ того, подписывая вычитаемыя, мы писали ихъ прямо съ обратными знаками.

2)

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 - a^5 & x - a \\
\hline
\quad " + ax^4 & x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4 \\
\overline{ax^4 - a^5} & \\
\quad " + a^2x^3 & \\
\overline{a^2x^3 - a^5} & \\
\quad " + a^3x^2 & \\
\overline{a^3x^2 - a^5} & \\
\quad " + a^4x & \\
\overline{a^4x - a^5} & \\
\quad " + a^5 & \\
\overline{\quad 0 \quad} &
\end{array}
$$

Подобнымъ образомъ можемъ убѣдиться, что разности: $x^3 - a^3$, $x^4 - a^4$, $x^6 - a^6$... (и вообще $x^m - a^m$) дѣлятся безъ остатка на разность $x - a$, т. е. **разность одинаковыхъ степеней двухъ чиселъ дѣлится безъ остатка на разность этихъ чиселъ.**

3) $(-23a^3b^2 + 12a + 20a^4b^3 + 12a^2b^2 - 10a^2b - 9ab) : (4ab - 3)$

Особенность этого примѣра состоитъ въ томъ, что по какой бы буквѣ мы ни располагали, въ дѣлимомъ встрѣчаются члены съ одинаковыми показателями главной буквы. Такiе члены соединяютъ въ одинъ, вынося главную букву за скобку. Расположимъ, напр., по буквѣ a и затѣмъ произведемъ дѣленiе такъ, какъ было объяснено.

$$
\begin{array}{l|l}
20b^3a^4 - 23b^2a^3 + (12b^2 - 10b)a^2 + (12 - 9b)a & 4ba - 3 \\
\hline
\quad " \quad + 15b^2a^3 & 5b^2a^3 - 2ba^2 + (3b - 4)a \\
\overline{\qquad - 8b^2a^3 + (12b^2 - 10b)a^2} & \\
\qquad " \qquad\qquad - 6ba^2 & \\
\overline{\qquad\qquad (12b^2 - 16b)a^2 + (12 - 9b)a} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + (9b - 12)a & \\
\overline{\qquad\qquad\qquad 0} &
\end{array}
$$

73. Признаки невозможности дѣленiя многочленовъ. Когда частное отъ дѣленiя многочленовъ не можетъ быть выражено цѣлымъ многочленомъ (или одночленомъ), то дѣленiе называютъ невозможнымъ. Вотъ признаки невозможнаго дѣленiя:

1) Если показатель главной буквы въ высшемъ членѣ дѣлимаго меньше показателя той же буквы въ высшемъ членѣ дѣлителя, то дѣленіе невозможно, потому что тогда нельзя получить высшаго члена частнаго. Напр., невозможно дѣленіе $(3x^2+5x-8):(2x^3-4)$, такъ какъ $3x^2$ не дѣлится на $2x^3$.

2) Если показатель главной буквы въ низшемъ членѣ дѣлимаго меньше показателя той же буквы въ низшемъ членѣ дѣлителя, то дѣленіе невозможно, потому что тогда нельзя получить низшаго члена частнаго. Напр., невозможно дѣленіе $(b^4+5b^3-3b^2+2b):$ $:(b^3-2b^2)$, такъ какъ $2b$ не дѣлится на $-2b^2$.

3) Если показатели главной буквы въ высшемъ и низшемъ членахъ дѣлимаго не меньше соотвѣтственно показателей этой буквы въ высшемъ и низшемъ членахъ дѣлителя, то еще нельзя сказать, чтобы дѣленіе было возможно. Въ этомъ случаѣ, чтобы судить о возможности дѣленія, надо приступить къ выполненію самаго дѣйствія и продолжать его до тѣхъ поръ, пока окончательно не убѣдимся въ возможности или невозможности получить цѣлое частное. При этомъ надо различать два случая:

I. Когда многочлены расположены по убывающимъ степенямъ главной буквы, то продолжаютъ дѣйствіе до тѣхъ поръ, пока или въ остаткѣ не получится 0 (тогда дѣленіе возможно), или пока не дойдутъ до такого послѣдняго остатка, первый членъ котораго содержитъ главную букву съ показателемъ меньшимъ, чѣмъ первый членъ дѣлителя (тогда дѣленіе невозможно) Напр.:

$$\begin{array}{l|l}
10a^4-2a^3 \;\;„\;\; +3a+4 & 2a^2-1 \\ \cline{2-2}
\;\;„\;\;\; +5a^2 & 5a^2-a+\frac{5}{2} \\ \cline{1-1}
-2a^3+5a^2+3a\ldots & \\
\;\;„\;\;\;\;\;\; -a & \\ \cline{1-1}
\;\;\;\;\;\; 5a^2+2a+4 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\; +\frac{5}{2} & \\ \cline{1-1}
\;\;\;\;\;\;\;\;\; 2a+6\frac{1}{2} &
\end{array}$$

Дѣленіе невозможно, потому что мы дошли до такого остатка, у котораго первый членъ не дѣлится на первый членъ дѣлителя

II. Когда многочлены расположены по возрастающимъ степенямъ главной буквы, то сколько бы ни продолжать дѣленія, нельзя получить такого остатка, у котораго первый членъ содержалъ бы главную букву съ показателемъ меньшимъ, чѣмъ у перваго члена дѣлителя, потому что при такомъ расположеніи показатели главной буквы въ первыхъ членахъ остатковъ идутъ, увеличиваясь (см. стран. 70). Въ этомъ случаѣ поступаютъ такъ: предположивъ, что цѣлое частное возможно, вычисляютъ заранѣе послѣдній членъ его, дѣля высшій членъ дѣлимаго (т.-е. послѣдній) на высшій членъ дѣлителя (на послѣдній). Найдя высшій членъ частнаго, продолжаютъ дѣленіе до тѣхъ поръ, пока въ частномъ не получится члена, у котораго показатель главной буквы равенъ показателю вычисленнаго члена. Если при этомъ получится остатокъ, то дѣленіе невозможно, потому что цѣлое частное не должно содержать членовъ выше того, который получается отъ дѣленія высшаго члена дѣлимаго на высшій членъ дѣлителя. Напр.:

$$\begin{array}{llll|l}
4+3a & \text{»} & -2a^3 & +10a^4 & -1+2a^2 \\
\cline{5-5}
\text{»} & +8a^2 & & & -4-3a-8a^2 \\
\cline{1-2}
3a & +8a^2 & -2a^3 & & \\
\text{»} & & +6a^3 & & \\
\cline{1-3}
 & 8a^2 & +4a^3 & +10a^4 & \\
 & \text{»} & & +16a^4 & \\
\cline{2-4}
 & & 4a^3 & +26a^4 &
\end{array}$$

Дѣленіе невозможно, потому что, продолжая дѣйствіе, мы получили бы въ частномъ членъ $-4a^3$, тогда какъ послѣдній членъ цѣлаго частнаго, если бы оно могло существовать, долженъ быть $5a^2$.

74. Правило дѣленія многочленовъ. Расположивъ дѣлимое и дѣлителя по убывающимъ или возрастающимъ степенямъ главной буквы, дѣлятъ 1-й членъ дѣлимаго на 1-й членъ дѣлителя и полученный одночленъ принимаютъ за 1-й членъ частнаго.

Умножаютъ всѣ члены дѣлителя на 1-й членъ частнаго и произведеніе вычитаютъ изъ дѣлимаго; отъ этого получаютъ 1-й остатокъ.

Дѣлятъ 1-й членъ этого остатка на 1-й членъ дѣлителя и полученный одночленъ принимаютъ за 2-й членъ частнаго.

Умножаютъ всѣ члены дѣлителя на 2-й членъ частнаго и произведеніе вычитаютъ изъ 1-го остатка; отъ этого получаютъ 2-й остатокъ.

Дѣлятъ 1-й членъ этого остатка на 1-й членъ дѣлителя и полученный одночленъ принимаютъ за 3-й членъ частнаго.

Продолжаютъ такъ далѣе до тѣхъ поръ, пока или въ остаткѣ не получится нуль (тогда дѣленіе возможно), или пока не обнаружится, что такого остатка быть не можетъ (тогда дѣленіе невозможно).

75. Зависимость между дѣлимымъ, дѣлителемъ и остаткомъ. При дѣленіи многочленовъ между дѣлимымъ, дѣлителемъ и частнымъ существуетъ такая же зависимость, какъ и при ариѳметическомъ дѣленіи цѣлыхъ чиселъ, т.-е. **дѣлимое равно произведенію дѣлителя на частное сложенному съ остаткомъ.** Въ самомъ дѣлѣ, изъ правила дѣленія многочленовъ видно, что остатокъ получается отъ вычитанія изъ дѣлимаго всѣхъ членовъ произведенія дѣлителя на частное; значитъ, обозначивъ многочлены дѣлимаго, дѣлителя, частнаго и остатка соотвѣтственно буквами N, P, Q и R, мы можемъ написать:

$$N - PQ = R; \quad \text{откуда:} \quad N = PQ + R.$$

Въ частномъ случаѣ, когда дѣленіе совершается безъ остатка, т. е. когда $R = 0$, эта зависимость будетъ: $N = PQ$.

Указанною зависимостью пользуются, когда хотятъ сдѣлать повѣрку дѣленія многочленовъ; съ этою цѣлью умножаютъ частное на дѣлителя и прибавляютъ къ произведенію остатокъ, если онъ есть; при правильномъ выполненіи дѣйствія въ результатѣ должно получиться дѣлимое.

Замѣчаніе. Раздѣливъ обѣ части равенства: $N = PQ + R$ на Q, получимъ:

$$\frac{N}{Q} = P + \frac{R}{Q}.$$

Этимъ соотношеніемъ иногда пользуются для преобразованія дробнаго частнаго. Такъ, сдѣлавъ дѣленіе, указанное выше на стр. 72, можемъ написать:

$$\frac{10a^4-2a^3+3a+4}{2a^2-1}=5a^2-a+\frac{5}{2}+\frac{2a+6^1/_2}{2a^2-1}.$$

ГЛАВА VI.

Условія тождественности многочленовъ.

76. Предварительныя разъясненія. Два алгебраическія выраженія наз. тождественными (§ 3), если при всякихъ численныхъ значеніяхъ буквъ они имѣютъ одну и ту же численную величину. Для обозначенія тождественности иногда употребляютъ особый знакъ ($\equiv$), который ставятъ между тождественными выраженіями. Если, напр., пишутъ:

$$(a+b)(a-b)\equiv a^2-b^2,$$

то этимъ хотятъ обратить особое вниманіе на то, что произведеніе $(a+b)(a-b)$ равно разности a^2-b^2 не при какихъ-либо частныхъ численныхъ значеніяхъ буквъ a и b, а при всевозможныхъ. Знакъ этотъ, впрочемъ, чаще всего замѣняется обыкновеннымъ знакомъ равенства ($=$).

Всѣ равенства, которыя мы выводили въ предыдущихъ главахъ алгебры, представляютъ собою тождества, т.-е. равенства тождественныхъ алгебраическихъ выраженій. Таковы, напр., равенства

$$A+(a-b+c-d)\equiv A+a-b+c-d \qquad (§ 49)$$

$$A-(a-b+c)\equiv A-a+b-c \qquad (§ 51)$$

$$(a+b-c)(d-e)\equiv ad+bd-cd-ae-be+ce \qquad (§ 58)$$

Выводя эти равенства и основанныя на нихъ правила алгебраическихъ дѣйствій надъ многочленами, мы однако не задавались вопросомъ, однозначны ли эти дѣйствія, или многозначны. Напр., мы вывели (§ 58), что для умноженія многочлена на многочленъ „умножаютъ каждый членъ множимаго на каждый членъ множителя и полученныя произведенія складываютъ". Такимъ образомъ, примѣнивъ это правило къ двумъ даннымъ многочленамъ, мы получимъ такой третій многочленъ, который при всевозможныхъ численныхъ значеніяхъ буквъ равенъ произведенію данныхъ многочленовъ. Но мы при этомъ не задавались вопросомъ, нельзя ли какимъ-нибудь путемъ найти еще и иной многочленъ, который также тождественно равнялся бы произведенію данныхъ многочленовъ; а до тѣхъ поръ, пока мы не рѣшили этого вопроса, мы остаемся въ неизвѣстности, однозначно ли алгебраическое умноженіе, или, быть можетъ, двузначно и даже много-

значно. Такой же вопросъ возникаетъ и о другихъ алгебраическихъ дѣйствіяхъ.

Чтобы разрѣшить этотъ вопросъ, мы должны предварительно установить признакъ, по которому можно узнать, когда два многочлена тождественны.

77. Нѣкоторыя замѣчанія о многочленахъ. Во всякое алгебраическое выраженіе могутъ входить числа, выраженныя цыфрами, и числа, выраженныя буквами. Послѣднія могутъ быть двоякаго рода: или это **постоянныя** числа, предполагаемыя данными, или же это **перемѣнныя** числа, величину которыхъ мы можемъ измѣнять [1]. Числа постоянныя обыкновенно обозначаются начальными буквами алфавита, а числа перемѣнныя—послѣдними.

Цѣлый многочленъ представляетъ собою алгебраическую сумму одночленовъ вида $Ax^my^nz^p\ldots$, гдѣ буквы x, y, z.. означаютъ перемѣнныя числа, а коэффиціентъ A и показатели степени m, n, p,...—какія-нибудь постоянныя числа, при чемъ показатели предполагаются числами цѣлыми положительными (въ частныхъ случаяхъ, впрочемъ, нѣкоторые изъ нихъ и даже всѣ могутъ быть нулями). Мы будемъ предполагать, что въ многочленахъ, о которыхъ намъ придется говорить въ этой главѣ, сдѣлано приведеніе подобныхъ членовъ (§ 16). Коэффиціенты членовъ многочлена наз. **коэффиціентами** самого многочлена. Если коэффиціенты многочлена сдѣлаются равными нулю, кромѣ какого-нибудь одного, то многочленъ обратится въ одночленъ, такъ что можно сказать, что одночленъ есть частный случай многочлена.

Сумма всѣхъ показателей при перемѣнныхъ въ одночленѣ наз. **степенью** его, или **измѣреніемъ**. Тотъ членъ многочлена, котораго степень наибольшая, наз. **высшимъ** членомъ его, а тотъ, котораго степень наименьшая, наз. **низшимъ** членомъ. **Степенью многочлена** наз. степень его высшаго члена. Если всѣ члены одного измѣренія, то многочленъ наз. **однороднымъ**. Тотъ членъ многочлена, который совсѣмъ не содержитъ перемѣнныхъ (иначе сказать, членъ нулевой степени), наз. **свободнымъ** членомъ.

Примѣры многочленовъ.

1) $2x - 5$ ... двучленъ 1-й степени;

2) $x^2 - 3x + 6$ ... трехчленъ 2-й степени;

3) $3x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x + 10$ ... многочленъ 4-й степени (не содержитъ члена съ x^3);

4) $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Kx + L$... общій видъ многочлена m-й степени, содержащаго одно перемѣнное и расположеннаго по убывающимъ степенямъ его;

---

[1]) Если величину каждаго изъ нихъ мы можемъ измѣнять произвольно, независимо отъ величины другихъ перемѣнныхъ, то они наз. **перемѣнными независимыми**.

5) $x^2 - 3xy + y^2$ ... однородный трехчленъ 2-й степени съ двумя перемѣнными;

6) $4xy^2z + z^4 - x^3y - 3xyz + 5z$ ... многочленъ 4-й степени съ тремя перемѣнными (не содержитъ свободнаго члена).

78. Лемма. **Если многочленъ съ однимъ перемѣннымъ x (для краткости обозначимъ этотъ многочленъ одною буквою M)**

$$M = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Kx$$

не имѣетъ свободнаго члена, то, какъ бы мало ни было данное положительное число α, всегда можно найти такое отличное отъ нуля значеніе x, при которомъ абсолютная величина многочлена будетъ меньше α.

Док. Очевидно, что абсолютная величина многочлена меньше суммы абс. величинъ его членовъ (или въ крайнемъ случаѣ равна ей). Съ другой стороны, если для x будемъ брать положительныя числа, меньшія 1, то $x^m < x$, $x^{m-1} < x$, $x^2 < x$ и т. д. Поэтому, обозначивъ абс. величины чиселъ M, A, B, C ... и x черезъ M', A', B', C' ... x', мы можемъ написать:

$$M' \leqslant A'x' + B'x' + C'x' + \ldots K'x'$$

т. е.

$$M' \leqslant (A' + B' + C' + \ldots K')x' \quad (\text{при } x' < 1).$$

Изъ этого неравенства видно, что если для x' возьмемъ какое-нибудь положительное число, которое, будучи меньше 1, въ то же время и меньше частнаго: $\alpha : (A' + B' + C' + \ldots K')$, то тогда M' сдѣлается меньше α: что и требовалось доказать.

Напр., чтобы многочленъ $x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x$ сдѣлался по абсолютной величинѣ меньше 0,000 001, достаточно для x взять какое-нибудь положительное число, меньшее частнаго 0,000 001 : (1 + 3 + 1 + 2), т. е. меньше $^1/_7$ милліонной.

79. Теорема. **Для того, чтобы многочленъ равнялся нулю при всевозможныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ, необходимо и достаточно, чтобы всѣ его коэффиціенты были нули.**

Док. Сначала докажемъ теорему для многочлена съ однимъ перемѣннымъ

$$M = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Jx^2 + Kx + L$$

1°. Необходимость признака. Предположимъ, что $M = 0$ при всевозможныхъ значеніяхъ x, докажемъ, что тогда всѣ его коэффиціенты должны быть нули. Если $M = 0$ при всевозможныхъ значеніяхъ x, то $M = 0$ при $x = 0$. Но тогда M обращается въ L; значитъ $L = 0$. Теперь данный многочленъ можно представить такъ:

$$M = x(Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Jx + K)$$

или

$$M = x(N + K),$$

если положимъ:

$$N = Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Jx.$$

Такъ какъ $M = 0$ при всевозможныхъ значеніяхъ x, то $M = 0$ и при всѣхъ значеніяхъ x, отличныхъ отъ нуля. Но при такихъ значеніяхъ про

изведеніе $x(N+K)$ можетъ равняться нулю только тогда, когда $N+K=0$. Это возможно лишь тогда, когда $K=0$. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что $K\neq 0$. Тогда, согласно доказанной выше леммѣ, можно для x найти такое значеніе (отличное отъ нуля), при которомъ абс. величина мн. N, не содержащаго свободнаго члена, сдѣлается меньше абс. величины K; при такомъ значеніи x алгебраическая сумма $N+K$ не можетъ равняться нулю. Значитъ, необходимо, чтобы $K=0$. Представивъ теперь данный многочленъ такъ:

$$M=x^2(Ax^{m-2}+Bx^{m-3}+\ldots+J),$$

мы такимъ же путемъ докажемъ, что $J=0$ и т. д.

2°. **Достаточность признака.** Пусть всѣ коэффиціенты многочлена M будутъ нули; тогда при всякомъ значеніи x каждый членъ многочлена равенъ нулю и потому $M=0$.

Докажемъ теперь теорему для многочлена съ 2 перемѣнными x и y. Расположимъ его члены по убывающимъ степенямъ одного какого-нибудь перемѣннаго, напр., x, тогда многочленъ будетъ имѣть видъ:

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots Kx+L \tag{1}$$

гдѣ буквы $A, B, C\ldots, L$ означаютъ нѣкоторые многочлены (или одночлены), содержащіе другое перемѣнное y, при чемъ коэффиціенты этихъ многочленовъ принадлежатъ къ коэффиціентамъ даннаго многочлена [1]). Дадимъ теперь перемѣнному y какое-нибудь частное значеніе y_0. Тогда коэффиціенты $A, B, C\ldots$ получатъ нѣкоторыя частныя значенія, которыя мы обозначимъ: $A_0, B_0, C_0, \ldots L_0$, и многочленъ будетъ:

$$A_0x^m+B_0x^{m-1}+C_0x^{m-2}+\ldots+L_0. \tag{2}$$

Допустимъ, что многочленъ (1) обращается въ 0 при всевозможныхъ значеніяхъ x и y; но тогда онъ обращается въ 0 при $y=y_0$ и любомъ значеніи x. Значитъ, многочленъ (2) съ однимъ перемѣннымъ x обращается въ 0 при всякомъ значеніи x. Поэтому, по доказанному выше, $A_0=0$, $B_0=0, \ldots L_0=0$. Но такъ какъ y_0 мы взяли произвольно, то многочлены $A, B, C\ldots L$ (съ однимъ перемѣннымъ y) должны быть равны 0 при всякомъ значеніи y, а для этого нужно, чтобы всѣ коэффиціенты этихъ многочленовъ были нули; но коэффиціенты эти служатъ также и коэффиціентами даннаго многочлена; значитъ, коэффиціенты и этого многочлена должны быть нули.

Достаточность признака очевидна сама собой.

---

[1]) Если, напр., данный многочленъ будетъ такой:

$$ax^3+x^2+by^2x+cxy-dx^2y^3-ex+fy+k,$$

то, расположивъ его по убывающимъ степенямъ x, получимъ многочленъ

$$ax^3+(1-dy^3)x^2+(by^2+cy-e)x+(fy+k),$$

для котораго, слѣд., $A=a$, $B=1-dy^3$, $C=by^2+cy-e$ и т. д. Коэффиціенты этихъ выраженій суть $a, b, c\ldots$, т. е. коэффиціенты даннаго многочлена.

Послѣ этого тѣмъ же пріемомъ докажемъ теорему для 3-хъ перемѣнныхъ, потомъ для 4-хъ и т. д.

80. Теорема (выражающая **законъ тождества многочленовъ**). **Для того, чтобы два многочлена были тождественны, необходимо и достаточно, чтобы каждый членъ одного многочлена имѣлъ себѣ подобный членъ въ другомъ многочленѣ, и чтобы коэффиціенты соотвѣтствующихъ подобныхъ членовъ были равны.**

Док. Сначала докажемъ теорему для многочленовъ съ однимъ перемѣннымъ. Пусть намъ дано тождество:

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Kx + L \equiv Px^n + Qx^{n-1} + \ldots + Rx + S.$$

Предположимъ, что $m \neq n$; пусть, напр., $m = n + 2$. Тогда можемъ написать:

$$Ax^{n+2} + Bx^{n+1} + Cx^n + \ldots + Kx + L \equiv Px^n + Qx^{n-1} + \ldots + Rx + S$$

Если эти многочлены равны другъ другу при всякомъ значеніи x, то ихъ разность тождественно равна нулю; значитъ

$$Ax^{n+2} + Bx^{n+1} + (C - P)x^n + (D - Q)x^{n-1} + \ldots + (L - S) \equiv 0.$$

Для этого, согласно предыдущей теоремѣ, необходимо и достаточно, чтобы $A = 0$, $B = 0$, $C = P$, $D = Q, \ldots L = S$; т.-е. необходимо и достаточно, чтобы многочлены были одной и той же степени и чтобы коэффиціенты подобныхъ членовъ ихъ были одинаковы; теорема такимъ образомъ доказана.

Такимъ же путемъ легко доказать теорему и для нѣсколькихъ перемѣнныхъ.

Изъ этой теоремы, между прочимъ, слѣдуетъ, что если два многочлена различаются между собою чѣмъ-нибудь, кромѣ порядка членовъ, то они не могутъ быть тождественными.

81. Однозначность алгебраическихъ сложенія, вычитанія и умноженія. Докажемъ однозначность для какого-нибудь одного изъ этихъ дѣйствій, напр., для умноженія; для другихъ дѣйствій можно повторить то же самое.

Положимъ, что, умножая многочлены M и N, мы съ одной стороны, производя дѣйствіе по правилу умноженія многочленовъ, получили нѣкоторый мн. P, а, съ другой стороны, какимъ-нибудь инымъ путемъ нашли новый мног. P'. Тогда многочлены P и P', будучи тождественны порознь одному и тому же произведенію MN, были бы тождественны между собою; а для этого, согласно закону тождества, необходимо, чтобы коэффиціенты P были соотвѣтственно равны коэффиціентамъ P', но тогда многочлены P и P' представляли бы въ сущности одинъ и тотъ же многочленъ. Такимъ образомъ, произведеніе MN можетъ равняться только одному многочлену (именно тому, который получается по правилу умноженія многочленовъ); значитъ, алгебраическое умноженіе есть дѣйствіе однозначное.

82. Однозначность алгебраическаго дѣленія. Дѣленіе многочлена на многочленъ не всегда возможно, если подъ дѣленіемъ разумѣть дѣйствіе (обратное умноженію), посредствомъ котораго по двумъ даннымъ многочленамъ (дѣлимому или дѣлителю) отыскивается такой третій многочленъ (частное), который, умноженный на дѣлителя, даетъ многочленъ, тождественный дѣлимому. Въ томъ случаѣ, когда такое **дѣленіе безъ остатка** возможно, оно однозначно Дѣйствительно, допустимъ, что отъ дѣленія мн. M на мн. N мы могли бы получить два различныхъ многочлена Q и Q' Тогда мы имѣли бы.

$$M \equiv NQ, \quad M \equiv NQ', \quad \text{откуда} \quad NQ \equiv NQ'.$$

Но послѣднее тождество невозможно, такъ какъ если Q чѣмъ-нибудь разнится отъ Q' (кромѣ порядка членовъ), то единственный многочленъ, который можетъ получиться отъ перемноженія N и Q, будетъ различаться (помимо порядка членовъ) отъ того единственнаго многочлена, который получается отъ перемноженія N и Q', а различные многочлены не могутъ быть тождественными. Значитъ, частное, если оно возможно, можетъ быть только одно (именно то, которое можно получить согласно правилу дѣленія многочленовъ, § 74)

Если дѣленіе мн. M на мн N въ указанномъ смыслѣ невозможно, то тогда дѣленіемъ M на N **называютъ нахожденіе такихъ двухъ многочленовъ** Q (частное) и R (остатка отъ дѣленія), **которые удовлетворяютъ тождеству**

$$M \equiv NQ + R,$$

при чемъ степень остатка R **ниже степени дѣлителя** N. Если степень дѣлителя N не выше степени дѣлимаго M, то **дѣленіе съ остаткомъ** (аналогичное ариѳметическому дѣленію цѣлыхъ чиселъ) возможно, какъ это видно изъ способа нахожденія частнаго и остатка, указаннаго въ правилѣ дѣленія многочленовъ (§ 74) Можно сказать, что такое дѣленіе возможно и тогда, когда степень дѣлителя выше степени дѣлимаго, только въ этомъ случаѣ частное будетъ нуль, а остаткомъ будетъ служить само дѣлимое, т.-е указанное выше тождество будетъ $M \equiv N.0 + M$

Покажемъ теперь, что дѣленіе съ остаткомъ есть дѣйствіе однозначное. Допустимъ, что помимо многочленовъ Q и R существуютъ еще многочлены Q' и R', также удовлетворяющіе опредѣленію дѣленія съ остаткомъ Тогда мы будемъ имѣть слѣдующія тождества:

$$M \equiv NQ + R; \quad M \equiv NQ' + R'; \quad \text{откуда:} \quad NQ' + R' \equiv NQ + R,$$

слѣд.: $$NQ' - NQ \equiv R - R', \text{ т.-е } N(Q - Q') \equiv R - R'.$$

Послѣднее тождество возможно только тогда, когда многочлены Q' и R' не отличаются соотвѣтственно отъ многочленовъ Q и R. Въ самомъ дѣлѣ, если бы мн. Q' разнился отъ мн. Q, то тогда лѣвая часть послѣдняго тождества, по раскрытіи скобокъ, представляла бы собою нѣкоторый многочленъ степени не ниже степени N, тогда какъ правая часть тождества была бы многочленомъ степени ниже степени N (такъ какъ по опредѣленію степень R и степень R' ниже степени N); а два многочлена различныхъ сте-

пеней не могутъ быть тождественными, какъ это слѣдуетъ изъ закона тождества многочленовъ (§ 80). Итакъ, необходимо, чтобы многочлены Q' и Q не различались другъ отъ друга; но тогда лѣвая часть тождества равна нулю, значитъ, и правая его часть равна нулю, и потому R не можетъ разниться отъ R'. Такимъ образомъ, частное можетъ быть только одно, и остатокъ можетъ быть только одинъ.

Замѣтимъ, что когда дѣленіе M на N совершается безъ остатка, то говорятъ просто, что M дѣлится на N.

ГЛАВА VIII.

Дѣлимость многочлена, цѣлаго относительно x, на разность $x-a$.

83. Теорема. Многочленъ $Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+K$ при дѣленіи на разность $x-a$ даетъ въ остаткѣ число $Aa^m+Ba^{m-1}+Ca^{m-2}+\ldots+K$, равное значенію дѣлимаго при $x=a$.

Док. Въ этомъ можно убѣдиться, разсмотрѣвъ самый процессъ дѣленія на $x-a$, напр:

$$\begin{array}{l|l}
Ax^3+Bx^2+Cx+D & x-a \\
\quad " \; +Aax^2 & Ax^2+(Aa+B)x+(Aa^2+Ba+C) \\
\hline
(Aa+B)x^2+Cx+\ldots & \\
\qquad " \quad +(Aa^2+Ba)x & \\
\hline
\qquad (Aa^2+Ba+C)x+D & \\
\qquad\qquad " \; +(Aa^3+Ba^2+Ca) & \\
\hline
\qquad\qquad Aa^3+Ba^2+Ca+D &
\end{array}$$

Но проще всего въ этомъ можно убѣдиться слѣдующимъ образомъ. Пусть отъ дѣленія даннаго многочлена (обозначимъ его M) на $x-a$ частное будетъ Q и остатокъ R. Этотъ остатокъ долженъ быть нулевой степени (т. е. онъ не долженъ содержать въ себѣ x), такъ какъ степень его должна быть ниже степени дѣлителя $x-a$, а этотъ дѣлитель 1-й степени. По опредѣленію дѣленія мы должны имѣть тождество:

$$M\equiv(x-a)\,Q+R.$$

Положивъ въ немъ $x=a$, получимъ:

$$M'=(a-a)\,Q'+R,$$

если буквами M' и Q' обозначимъ тѣ значенія M и Q, которыя эти многочлены принимаютъ при $x=a$; остатокъ R, какъ не содержащій вовсе x, не измѣнится отъ подстановки a на мѣсто x. Такъ какъ $a-a=0$ и $(a-a)Q'=0.Q'=0$, то послѣднее равенство даетъ:

$$R=M'=Aa^m+Ba^{m-1}+Ca^{m-2}+\ldots+K;$$ что и тр. док.

Слѣдствіе. Такъ какъ сумму $x+a$ можно разсматривать, какъ разность $x-(-a)$, то, примѣняя къ этой разности доказанную теорему, найдемъ: **многочленъ $Ax^m+Bx^{m-1}+\ldots+K$ при дѣленіи на сумму $x+a$ даетъ въ остаткѣ число $A(-a)^m+B(-a)^{m-1}+\ldots+K$, равное значенію дѣлимаго при $x=-a$.**

84. Теорема. **Для того, чтобы многочленъ $Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+$ $+\ldots+K$ дѣлился на разность $x-a$, необходимо и достаточно, чтобы при $x=a$ онъ обращался въ 0**

Док. Это необходимо, такъ какъ если указанный многочленъ дѣлится на $x-a$, то остатокъ отъ дѣленія долженъ равняться 0, а этотъ остатокъ есть то значеніе дѣлимаго, которое онъ принимаетъ при $x=a$. Это достаточно, такъ какъ если многочленъ обращается въ 0 при $x=a$, то это значитъ, что остатокъ отъ дѣленія этого многочлена на $x-a$ равенъ 0.

Слѣдствіе. **Для того, чтобы многочленъ $Ax^m+Bx^{m-1}+\ldots+K$ дѣлился на сумму $x+a$, необходимо и достаточно, чтобы при $x=-a$ онъ обращался въ 0, такъ какъ сумма $x+a$ есть разность $x-(-a)$.**

Примѣры. 1) Многочленъ x^5-3x^2+5x-1 при дѣленіи на $x-2$ даетъ остатокъ, равный $2^5-3.2^2+5.2-1=29$.

2) Многочленъ x^5-3x^2+5x-1 при дѣленіи на $x+2$ даетъ остатокъ, $(-2)^5-3(-2)^2+5(-2)-1=-55$.

3) Многочленъ x^3-4x^2+9 дѣлится на $x-3$, потому что остатокъ отъ дѣленія равенъ $3^3-4.3^2+9=0$

4) Многочленъ $2x^2+x-45$ дѣлится на $x+5$, такъ какъ остатокъ равенъ $2(-5)^2+(-5)-45=0$

85. Дѣлимость нѣкоторыхъ двучленовъ. Слѣдуетъ обратить особое вниманіе на слѣдующіе случаи дѣлимости двучленовъ.

1) **Разность одинаковыхъ степеней двухъ чиселъ дѣлится на разность тѣхъ же чиселъ,** такъ какъ x^m-a^m при дѣленіи на $x-a$ даетъ остатокъ $a^m-a^m=0$.

2) **Сумма одинаковыхъ степеней двухъ чиселъ не дѣлятся на разность тѣхъ же чиселъ,** такъ какъ x^m+a^m при $x=a$ даетъ остатокъ $a^m+a^m=2a^m$, что при $a\neq 0$ не равно 0.

3) **Разность одинаковыхъ четныхъ степеней двухъ чиселъ дѣлится, а нечетныхъ не дѣлится** на сумму этихъ чиселъ, такъ какъ x^m-a^m при $x=-a$ даетъ $(-a)^m-a^m$, что при m четномъ равно нулю, а при m нечетномъ равно $-2a^m$.

4) **Сумма одинаковыхъ нечетныхъ степеней двухъ чиселъ дѣлится, а четныхъ не дѣлится** на сумму этихъ чиселъ, такъ какъ x^m+a^m при $x=-a$ даетъ $(-a)^m+a^m$, что при m нечетномъ равно нулю, а при m четномъ равно $2\,a^m$ [1]).

---

[1]) Полезно имѣть въ виду слѣдующее простое соображеніе, посредствомъ котораго легко возстановить въ памяти указанные четыре случая дѣлимости. Пусть, напр., мы желаемъ вспомнить, когда x^m+a^m дѣлится на $x+a$. Для

Замѣчаніе. Мы видимъ, что разность $x^m - a^m$ при m четномъ дѣлится и на $x-a$, и на $x+a$; въ такомъ случаѣ эта разность должна дѣлиться на произведеніе $(x-a)(x+a)$, т.-е. на x^2-a^2 Дѣйствительно, представивъ разность $x^{2n}-a^{2n}$ въ такомъ видѣ: $(x^2)^n-(a^2)^n$, мы замѣчаемъ, что это есть разность одинаковыхъ степеней чиселъ x^2 и a^2; слѣд., она должна дѣлиться на разность этихъ чиселъ, т. е. на x^2-a^2. Такъ $x^4-a^4=(x^2-a^2)(x^2+a^2)$, $x^6-a^6=(x^2-a^2)(x^4+a^2x^2+a^4)$, и т п.

86. Частныя, получаемыя при дѣленіи указанныхъ двучленовъ. Изъ разсмотрѣнія процесса дѣленія:

$$\begin{array}{lll} & x^m - a^m & \mid x-a \\ & -x^m + ax^{m-1} & x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \dots + a^{m-1}. \\ \text{1-й ост.} \dots & ax^{m-1} - a^m & \\ & -ax^{m-1} + a^2x^{m-2} & \\ \text{2-й ост.} \dots & a^2x^{m-2} - a^m & \\ & -a^2x^{m-2} + a^3x^{m-3} & \\ \text{3-й ост.} \dots & a^3x^{m-3} - a^m & \\ & \dots\dots & \\ m-1 \text{ ост.} \dots & a^{m-1}x - a^m & \\ m\text{-й ост.} \dots & a^m - a^m = 0 & \end{array}$$

замѣчаемъ, что многочленъ, получившійся въ частномъ, содержитъ m членовъ; сумма показателей въ каждомъ членѣ при a и x есть число постоянное, равное $m-1$; показатели x идутъ уменьшаясь на 1 отъ $m-1$ до 0, показатели a идутъ, увеличиваясь на 1 отъ 0 до $m-1$; коэффиціенты у всѣхъ членовъ равны 1; знаки всѣ $+$.

Чтобы получить частное отъ дѣленія x^m-a^m на $x+a$ при m четномъ достаточно въ полученномъ выше частномъ замѣнить a на $-a$. То же самое можно сказать о частномъ $(x^m+a^m):(x+a)$ при m нечетномъ. Такимъ образомъ

1) $x^m-a^m=(x-a)(x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\dots+a^{m-1})$;

2) $x^m-a^m=(x+a)(x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\dots-a^{m-1})$ (при m четномъ);

3) $x^m+a^m=(x+a)(x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\dots+a^{m-1})$; (при m нечетномъ).

ГЛАВА VIII.

Разложеніе многочленовъ на множителей.

87. Укажемъ нѣкоторые простѣйшіе случаи, когда многочленъ можетъ быть разложенъ на цѣлыхъ множителей.

этого разсуждаемъ такъ: x^1+a^1 дѣлится на $x+a$, а x^2+a^2 не дѣлится на $x+a$; значитъ, сумма нечетныхъ степеней дѣлится, а сумма четныхъ не дѣлится на $x+a$. Подобнымъ же образомъ легко можемъ вспомнить дѣлимость или недѣлимость и въ остальныхъ изъ указанныхъ случаевъ.

I Если всѣ члены многочлена содержатъ общаго множителя, то его можно вывести за скобку, такъ какъ

$$am + bm - cm = (a + b - c)m.$$

Примѣры. 1) $16a^2b^3x - 4a^3b^2x^2 = 4a^2b^2x(4b - ax)$;
2) $x^{n+1} - 2x^n + 3x^{n-1} = x^{n-1}(x^2 - 2x + 3)$;
3) $4m(a - 1) - 3n(a - 1) = (a - 1)(4m - 3n)$.

II. Если данный двучленъ представляетъ собою квадратъ одного числа безъ квадрата другого числа, то его можно замѣнить произведеніемъ суммы этихъ чиселъ на ихъ разность, такъ какъ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Примѣры. 1) $m^4 - n^4 = (m^2)^2 - (n^2)^2 = (m^2 + n^2)(m^2 - n^2) = (m^2 + n^2)(m + n)(m - n)$,
2) $25x^2 - 4 = (5x)^2 - 2^2 = (5x + 2)(5x - 2)$;
3) $y^2 - 1 = y^2 - 1^2 = (y + 1)(y - 1)$;
4) $x^2 - (x - 1)^2 = [x + (x - 1)][x - (x - 1)] = (x + x - 1)(x - x + 1) = 2x - 1$;
5) $(x + y)^2 - (x - y)^2 = (x + y + x - y)(x + y - x + y) = 2x.2y = 4xy$

III. Если данный трехчленъ представляетъ собою сумму квадратовъ двухъ чиселъ, увеличенную или уменьшенную удвоеннымъ произведеніемъ этихъ чиселъ, то его можно замѣнить квадратомъ суммы или разности этихъ чиселъ, такъ какъ

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (b - a)^2$$

Примѣры. 1) $a^2 + 2a + 1 = a^2 + 2a.1 + 1^2 = (a + 1)^2$;
2) $x^4 + 4 - 4x^2 = (x^2)^2 + 2^2 - 2(2x^2) = (x^2 - 2)^2 = (2 - x^2)^2$;
3) $-x + 25x^2 + 0{,}01 = (5x)^2 + (0{,}1)^2 - 2(5x.0{,}1) = (5x - 0{,}1)^2 = (0{,}1 - 5x)^2$,
4) $(a + x)^2 + 2(a + x) + 1 = [(a + x) + 1]^2 = (a + x + 1)^2$;
5) $4x^n - x^{2n} - 4 = -(x^{2n} + 4 - 4x^n) = -(x^n - 2)^2 = -(2 - x^n)^2$

IV. Иногда многочленъ, состоящій изъ 4 или болѣе членовъ, можно привести къ виду $a^2 - b^2$ или $a^2 \pm 2ab + b^2$, разбивъ его предварительно на части.

Примѣры. 1) $m^2 + n^2 - 2mn - p^2 = (m^2 + n^2 - 2mn) -$
$- p^2 = (m-n)^2 - p^2 = (m - n + p)(m - n - p)$;

2) $x^2 - y^2 + 6y - 9 = x^2 - (y^2 - 6y + 9) = x^2 -$
$- (y - 3)^2 = [x + (y - 3)][x - (y - 3)] =$
$= (x + y - 3)(x - y + 3)$;

3) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc =$
$= (a^2 + b^2 + 2ab) + c^2 + (2ac + 2bc) =$
$= (a + b)^2 + c^2 + 2(a + b)c = (a + b + c)^2$.

V. Иногда члены многочлена можно соединить въ нѣсколько группъ, изъ которыхъ каждая разлагается на множителей; если въ числѣ этихъ множителей окажутся общіе, то ихъ можно выносить за скобки.

Примѣры. 1) $ac + ad + bc + bd = (ac + ad) + (bc + bd) =$
$= a(c + d) + b(c + d) = (c + d)(a + b)$;

2) $12 - 4x - 3x^2 + x^3 = (12 - 4x) - (3x^2 - x^3) =$
$= 4(3 - x) - x^2(3 - x) = (3 - x)(4 - x^2) =$
$= (3 - x)(2 + x)(2 - x)$.

VI. Иногда бываетъ полезно ввести вспомогательные члены или какой-нибудь членъ разложить на два члена.

Примѣры 1) $a^3 - b^3 = a^3 - a^2b + a^2b - b^3 = a^2(a - b) +$
$+ b(a^2 - b^2) = a^2(a - b) + b(a + b)(a - b) =$
$= (a - b)[a^2 + b(a + b)] = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

2) $a^3 + b^3 = a^3 + a^2b - a^2b + b^3 = a^2(a + b) -$
$- b(a^2 - b^2) = a^2(a + b) - b(a + b)(a - b) =$
$(a + b)[a^2 - b(a - b)] = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

3) $2x^2 + 3xy + y^2 = 2x^2 + 2xy + xy + y^2 =$
$= 2x(x + y) + y(x + y) = (x + y)(2x + y)$.

Разложенія разности и суммы двухъ кубовъ, указанныя въ примѣрахъ 1-мъ и 2-мъ, полезно запомнить.

ГЛАВА IX.

Алгебраическія дроби.

88. Опредѣленіе. Алгебраической дробью называется частное отъ дѣленія двухъ алгебраическихъ выраженій въ томъ случаѣ, когда дѣленіе только указано. Такъ, $a:b, \frac{a+b}{c-d}, \frac{2x^2-x+5}{x+2}$ и тому подобныя выраженія суть алгебраическія дроби. Въ такихъ выраженіяхъ дѣлимое называется **числителемъ**, дѣлитель—**знаменателемъ** а то и другое—**членами дроби.**

Алгебраическая дробь отличается отъ ариѳметической тѣмъ, что члены ариѳметической дроби всегда—числа цѣлыя положительныя, тогда какъ члены алгебраической дроби могутъ быть числами какими угодно, лишь бы только знаменатель не равнялся нулю (такъ какъ дѣленіе на 0 невозможно). Напримѣръ $^3/_4$ есть ариѳметическая дробь, а выраженіе $\frac{^2/_5}{-3}$ представляетъ собою частный случай алгебраической дроби. Несмотря однако на это различіе, съ дробями алгебраическими, какъ мы сейчасъ увидимъ, можно поступать по тѣмъ же правиламъ, какія указаны въ ариѳметикѣ для дробей ариѳметическихъ.

89. Основное свойство дроби. Величина дроби не измѣнится, если оба ея члена умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же число, отличное отъ нуля.

Пусть имѣемъ дробь $\frac{a}{b}$ и какое-нибудь положительное или отрицательное число m. Требуется доказать, что $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$.

Обозначимъ частное отъ дѣленія a на b черезъ q, а частное отъ дѣленія am на bm черезъ q', т.-е. положимъ, что

$$\frac{a}{b}=q \quad [1], \qquad \frac{am}{bm}=q' \quad [2].$$

Докажемъ, что $q=q'$ По опредѣленію дѣленія изъ равенствъ [1] и [2] выводимъ:

$$a=bq \quad [3], \quad am=bmq' \quad [4].$$

Умножимъ обѣ части равенства [3] на m (отчего, конечно, равенство не нарушится):

$$am = bqm \quad [5].$$

Сравнивая равенства [5] и [4], находимъ, что оба произведенія: bqm и bmq' равны одному и тому же числу am; поэтому они равны между собою:

$$bqm = bmq'.$$

Раздѣлимъ обѣ части этого равенства на bm (что возможно сдѣлать, такъ какъ числа b и m не нули, слѣд., и произведеніе bm не нуль); равенство отъ этого не нарушится:

$$\frac{bqm}{bm} = \frac{bmq'}{bm}.$$

Чтобы раздѣлить на bm, достаточно раздѣлить на b и полученное частное раздѣлить на m (§ 39). Раздѣливъ bqm или qmb на b, получимъ qm; раздѣливъ qm на m, найдемъ q. Подобно этому, раздѣливъ bmq' на bm, найдемъ q'. Значитъ:

$$q = q' \text{ и, слѣд., } \frac{a}{b} = \frac{am}{bm}.$$

Переходя въ этомъ равенствѣ отъ правой части къ лѣвой, видимъ, что величина дроби не измѣняется отъ дѣленія ея членовъ на одно и то же число, не равное нулю.

Оговорка: „не равное нулю“ должна быть сдѣлана потому, что отъ умноженія членовъ дроби на 0 мы получили бы частное $\frac{0}{0}$, которое равняется любому числу (§ 36), а дѣленіе на 0 невозможно.

90. Приведеніе членовъ дроби къ цѣлому виду. Умножая оба члена дроби на выбранное надлежащимъ образомъ число или алгебраическое выраженіе, мы всегда можемъ преобразовать данную дробь такъ, что числитель и знаменатель ея будутъ цѣлыми алгебраическими выраженіями.

Примѣры.

1) $\dfrac{\frac{3}{4}a}{b} = \dfrac{3a}{4b}$ (оба члена умножены на 4);

2) $\dfrac{7a}{2\frac{3}{5}b} = \dfrac{35a}{13b}$ (на 5);

3) $\dfrac{\frac{2}{3}a}{\frac{7}{8}b} = \dfrac{16a}{21b}$ (на 24);

4) $\dfrac{2a + \frac{5}{6}}{1 - a} = \dfrac{12a + 5}{6 - 6a}$ (на 6);

5) $\dfrac{ax - 1}{1 - \frac{1}{x}} = \dfrac{ax^2 - x}{x - 1}$ (на x).

91. Перемѣна знаковъ у членовъ дроби. 1°. Перемѣнить знакъ на противоположный и передъ числителемъ и передъ знаменателемъ дроби—это все равно, что перемѣнить знакъ у дѣлимаго и дѣлителя; отъ этого величина частнаго не измѣняется. Напримѣръ:

$$\frac{-8}{-4} = 2 \text{ и } \frac{8}{4} = 2; \quad \frac{-10}{+2} = -5 \text{ и } \frac{+10}{-2} = -5.$$

2°. Перемѣнить знакъ на противоположный передъ какимъ-нибудь однимъ членомъ дроби—все равно, что перемѣнить знакъ передъ самою дробью; напр.:

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}, \quad \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

(при дѣленіи минусъ на плюсъ и плюсъ на минусъ даютъ минусъ).

Этими двумя свойствами дроби иногда пользуются для нѣкотораго преобразованія ея; напр.,

$$\frac{-3x}{a-b} = \frac{3x}{b-a}; \quad \frac{1-a}{2-b} = \frac{a-1}{b-2};$$

$$\frac{m^2-n^2}{n-m} = \frac{m^2-n^2}{-(m-n)} = -\frac{m^2-n^2}{m-n} = -(m+n).$$

92. Сокращеніе дроби. Если числитель и знаменатель имѣютъ общаго множителя, не равнаго нулю, то на него можно сократить дробь (потому что величина дроби не измѣняется отъ дѣленія обоихъ ея членовъ на одно и то же число, отличное отъ нуля).

Разсмотримъ отдѣльно слѣдующіе два случая:

I. Числитель и знаменатель — одночлены.

Примѣры. 1) $\frac{12a^2x^3}{15ax^2y}=\frac{4ax}{5y}$ (сокращено на $3ax^2$),

2) $\frac{54a^nb^{n-3}}{72ab^{n-1}}=\frac{3a^{n-1}}{4b^2}$ (сокращено на $18ab^{n-3}$).

Правило. Чтобы сократить дробь, у которой числитель и знаменатель одночлены съ цѣлыми коэффиціентами, предварительно находятъ общаго наибольшаго дѣлителя коэффиціентовъ и приписываютъ къ нему множителями всѣ буквы, которыя входятъ одновременно въ числителя и знаменателя дроби, беря каждую изъ этихъ буквъ съ наименьшимъ показателемъ, съ какимъ она входитъ въ члены дроби; составивъ такое произведеніе [1]), дѣлятъ на него оба члена дроби.

II. Числитель или знаменатель — многочлены.

Примѣры.

1) $$\frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}=\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{(x^2-1)^2}=\frac{(x-1)(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2-1)}=$$

$$=\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x+1};$$

2) $$\frac{n-m}{m^2-n^2}=\frac{-(m-n)}{(m+n)(m-n)}=\frac{-1}{m+n}=-\frac{1}{m+n}.$$

Правило. Чтобы сократить дробь съ многочленнымъ числителемъ или знаменателемъ, предварительно разлагаютъ многочлены н[а]

---

[1]) По аналогіи съ цѣлыми числами это произведеніе можно назвать общимъ наибольшимъ дѣлителемъ числителя и знаменателя дроби.

множителей и затѣмъ сокращаютъ на общихъ множителей, если такіе окажутся [1]).

93. Приведеніе дробей къ одинаковому знаменателю. Умножая оба члена каждой дроби на выбранное надлежащимъ образомъ число или алгебраическое выраженіе, мы можемъ сдѣлать знаменателей всѣхъ данныхъ дробей одинаковыми. При этомъ могутъ представиться тѣ же 3 случая, какъ и для дробей ариѳметическихъ, а именно:

I-й случай: знаменатели, всѣ или нѣкоторые, имѣютъ общихъ множителей.

Чтобы найти въ этомъ случаѣ простѣйшаго общаго знаменателя, составляютъ произведеніе изъ всѣхъ различныхъ множителей, на которые разлагаются знаменатели, беря каждаго множителя съ наибольшимъ показателемъ, съ какимъ онъ входитъ въ составъ знаменателей [2]).

Найдя такое произведеніе, слѣдуетъ затѣмъ выписать для каждой дроби **дополнительныхъ множителей** (не достающихъ въ ея знаменателѣ для полученія общаго знаменателя) и на нихъ умножить оба члена каждой дроби.

Примѣръ I-й. $\frac{az}{15x^2y^3}$, $\frac{y^2}{12x^3z^2}$, $\frac{az}{18xy^2}$.

Такъ какъ $15x^2y^3=3.5x^2y^3$, $12x^3z^2=2^2.3x^3z^2$ и $18xy^2=2.3^2xy^2$, то различные множители, входящіе въ составъ знаменателей, суть 2, 3, 5, x, y и z. Взявъ каждаго изъ этихъ множителей съ наибольшимъ показателемъ, получимъ $2^2.3^2.5x^3y^3z^2=180x^3y^3z^2$. Это и будетъ общій знаменатель. Дополнительные множители будутъ: для 1-й дроби: $12xz^2$, для 2-й: $15y^3$, для 3-й $10x^2yz^2$.

---

[1]) Обращаемъ вниманіе учащихся на ошибку, которую иногда дѣлаютъ при сокращеніи дробей: нельзя сокращать часть числителя съ частью знаменателя. Напримѣръ, было бы вообще ошибочно сократить дробь $\frac{am+b}{cm+d}$ такъ $\frac{a+b}{c+d}$.

[2]) Такое произведеніе, по аналогіи съ цѣлыми числами, можно назвать наименьшимъ кратнымъ всѣхъ знаменателей.

Послѣ приведенія дроби будутъ слѣдующія:

$$\frac{12axz^3}{180x^3y^3z^3},\quad \frac{15y^3}{180x^3y^3z^3},\quad \frac{10ax^2yz^3}{180x^3y^3z^3}.$$

Примѣръ 2-й. $\frac{1}{x^2+2x+1},\quad \frac{4}{x+2x^2+x^3},\quad \frac{5}{2x+2x^2}.$

Разложимъ знаменателей на множителей:

$x^2+2x+1=(x+1)^2$	доп. мн. $2x$
$x+2x^2+x^3=x(x+1)^2$	» » 2
$2x+2x^2=2x(x+1)$	» » $x+1$.
Общ. знам. $=2x(x+1)^2$	

Послѣ приведенія дроби будутъ слѣдующія:

$$\frac{2x}{2x(x+1)^2},\quad \frac{8}{2x(x+1)^2},\quad \frac{5(x+1)}{2x(x+1)^2}$$

Примѣръ 3-й. $\frac{2}{x^2-a^2},\quad \frac{1}{a-x},\quad \frac{3}{x+a}.$

Перемѣнимъ знаки въ знаменателѣ 2-й дроби на противоположные, а чтобы не измѣнилась величина дроби, измѣнимъ знакъ и у ея числителя:

$$\frac{2}{x^2-a^2},\quad \frac{-1}{x-a},\quad \frac{3}{x+a}.$$

Общ. зн.$=x^2-a^2$; доп. мн.: для 2-й дроби: $x+a$, для 3-й: $x-a$
Послѣ приведенія дроби будутъ:

$$\frac{2}{x^2-a^2},\quad \frac{-x-a}{x^2-a^2},\quad \frac{3(x-a)}{x^2-a^2}.$$

2-й случай: одинъ изъ знаменателей дѣлится на всѣхъ остальныхъ.

Этотъ знаменатель и будетъ общимъ. Дробь, имѣющую этого знаменателя, оставляютъ безъ перемѣны, а члены каждой изъ

остальныхъ дробей умножаютъ на соотвѣтствующаго дополнительнаго множителя.

Примѣръ. $\frac{x}{a-b}$, $\frac{y}{a+b}$, $\frac{z}{a^2-b^2}$.

Знаменатель a^2-b^2 дѣлится на $a-b$ и на $a+b$. Это и будетъ общій знаменатель. Дополнительный множитель для первой дроби есть $a+b$, для второй $a-b$; послѣ приведенія къ общему знаменателю получимъ:

$$\frac{(a+b)x}{a^2-b^2},\quad \frac{(a-b)y}{a^2-b^2},\quad \frac{z}{a^2-b^2}$$

3-й случай: никакая пара знаменателей не имѣетъ общихъ множителей.

Въ этомъ случаѣ оба члена каждой дроби надо умножить на произведеніе знаменателей всѣхъ остальныхъ дробей.

Примѣры. 1) $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ .... $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{cbf}{dbf}$, $\frac{ebd}{fbd}$;

2) $\frac{x}{m^2}$, $\frac{y}{n^2}$, $\frac{z}{pq}$ ...... $\frac{xn^2pq}{m^2n^2pq}$, $\frac{ym^2pq}{m^2n^2pq}$, $\frac{zm^2n^2}{m^2n^2pq}$;

3) $\frac{a}{a+b}$, $\frac{b}{a-b}$ .... $\frac{a(a-b)}{a^2-b^2}$, $\frac{b(a+b)}{a^2-b^2}$.

94. Сложеніе и вычитаніе дробей. По правилу дѣленія многочлена (§ 69), мы можемъ написать:

$$\frac{a+b+c}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m},\quad \frac{a-b}{m}=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}.$$

Читая эти равенства справа налѣво, находимъ:

1) **чтобы сложить дроби съ одинаковыми знаменателями, складываютъ ихъ числителей и подъ суммою подписываютъ того же знаменателя;**

2) **чтобы вычесть дроби съ одинаковыми знаменателями, изъ числителя уменьшаемаго вычитаютъ числителя вычитаемаго и подъ разностью подписываютъ общаго знаменателя.**

Если данныя для сложенія или вычитанія дроби имѣютъ разныхъ знаменателей, то предварительно ихъ слѣдуетъ привести къ одинаковому знаменателю.

Примѣры.

(Надъ дробями надписаны дополнительные множители).

1) $\overset{df}{\frac{a}{b}} + \overset{bf}{\frac{c}{d}} + \overset{bd}{\frac{e}{f}} = \frac{adf + cbf + ebd}{bdf}$; 2) $\overset{2b}{\frac{3m^2}{10a^2bc}} - \overset{5ca}{\frac{5n^2}{4ab^2}} = \frac{6bm^2 - 25acn^2}{20a^2b^2c}$

3) $\frac{x+1}{2x-2} + \frac{2x-3}{x+1} - \frac{x^2+3}{2x^2-2}$.

$2x - 2 = 2(x-1)$	доп. мн. $= x+1$
$x + 1 = x + 1$	» » $= 2(x-1)$
$2x^2 - 2 = 2(x+1)(x-1)$	» » $= 1$.
Общ. знам. $= 2(x-1)(x+1)$	

Въ результатѣ получимъ:

$$\frac{(x+1)(x+1) + (2x-3)\,2(x-1) - (x^2+3)}{2(x^2-1)} =$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 1 + (4x^2 - 6x - 4x + 6) - x^2 - 3}{2(x^2-1)} =$$

$$= \frac{4x^2 - 8x + 4}{2(x^2-1)} = \frac{4(x-1)(x-1)}{2(x+1)(x-1)} = \frac{2(x-1)}{x+1}\,[1].$$

---

[1]) Обращаемъ вниманіе учащихся на ошибку, которую иногда дѣлаютъ при вычитаніи дробей. Пусть, напр., дано:

$$\frac{a}{m} - \frac{b+c}{m}.$$

Подписывая общаго знаменателя, мы должны помнить, что знакъ минуса относится ко всему числителю $b+c$, а не къ одному члену b; поэтому было бы ошибочно написать такъ:

$$\frac{a}{m} - \frac{b+c}{m} = \frac{a-b+c}{m}.$$

Правильный результатъ будетъ:

$$\frac{a}{m} - \frac{b+c}{m} = \frac{a-(b+c)}{m} = \frac{a-b-c}{m}.$$

Замѣчаніе. Такъ какъ всякое алгебраическое выражені можно представить въ видѣ дроби, у которой числителемъ слу житъ это выраженіе, а знаменатель есть 1, то правила слож нія и вычитанія дробей примѣнимы и къ случаямъ, когд какое-либо данное выраженіе есть цѣлое. Напримѣръ:

$$3a^2 - \frac{2x}{ab} = \frac{3a^2}{1} - \frac{2x}{ab} = \frac{3a^2 . ab}{ab} - \frac{2x}{ab} = \frac{3a^3b - 2x}{ab}.$$

95. Умноженіе дробей. **Чтобы умножить дробь на дробь, перемножають ихъ числителей между собою и знаменателей между собою и первое произведеніе дѣлять на второе.**

Требуется доказать, что

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Для доказательства положимъ, что

$$\frac{a}{b} = q \text{ и } \frac{c}{d} = q'; \quad \text{откуда: } a = bq \text{ и } c = dq'.$$

Перемножимъ лѣвыя части этихъ двухъ равенствъ между собою и правыя части между собою; такъ какъ при этомъ равныя числа мы умножаемъ на равныя, то и результаты должны быть равны, слѣдов:

$$ac = (bq)(dq') = bqdq'.$$

Въ правой части этого равенства, пользуясь сочетательны свойствомъ произведенія (§ 33, 2°), соединимъ сомножителей въ такія группы:

$$ac = (bd)(qq').$$

Раздѣлимъ обѣ части этого равенства на bd (что возможн сдѣлать, такъ какъ b и d, какъ знаменатели данныхъ дробей суть числа, отличныя отъ нуля):

$$\frac{ac}{bd} = qq', \text{ т.-е. } \frac{ac}{bd} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$$

Замѣчанія. 1). Правило умноженія дробей распространяется и на тѣ случаи, когда множимое или множитель—цѣлыя выраженія; напр.:

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{c}=\frac{ab}{c};\qquad \frac{a}{b}\cdot c=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{1}=\frac{ac}{b}.$$

2). Правило умноженія дробей распространяется и на тотъ случай, когда перемножаются болѣе двухъ дробей; напр.:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}=\frac{ac}{bd}\cdot\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}.$$

98. Дѣленіе дробей. **Чтобы раздѣлить дробь на дробь умножаютъ числителя первой дроби на знаменателя второй, а знаменателя первой дроби на числителя второй, и первое произведеніе дѣлятъ на второе. Такъ:**

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

Въ этомъ легко убѣдиться повѣркою· умноживъ предполагаемое частное на дѣлителя, мы получимъ дѣлимое:

$$\frac{ad}{bc}\cdot\frac{c}{d}=\frac{adc}{bcd}=\frac{a}{b}.$$

Такъ какъ $\frac{ad}{bc}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$, то можно высказать другое правило:

чтобы раздѣлить дробь на дробь, достаточно первую дробь умножить на обратную второй.

Замѣчаніе. Правило дѣленія дроби на дробь можно примѣнять и къ случаямъ дѣленія дроби на цѣлое и цѣлаго на дробь.

$$a:\frac{b}{c}=\frac{a}{1}:\frac{b}{c}=\frac{ac}{b};\qquad \frac{a}{b}:c=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{1}=\frac{a}{bc}.$$

97. Примѣръ на преобразованіе дроби. Пусть требуется упростить дробь:

$$\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{1+\cfrac{x+1}{3-x}}}$$

Складываемъ 1 съ дробью $\frac{x+1}{3-x}$:

$$1+\frac{x+1}{3-x}=\frac{3-x}{3-x}+\frac{x+1}{3-x}=\frac{3-x+x+1}{3-x}=\frac{4}{3-x}$$

Дѣлимъ 1 на дробь $\frac{4}{3-x}$:

$$1:\frac{4}{3-x}=\frac{3-x}{4}.$$

Складываемъ x съ этою дробью:

$$x+\frac{3-x}{4}=\frac{4x}{4}+\frac{3-x}{4}=\frac{4x+3-x}{4}=\frac{3x+3}{4}.$$

Наконецъ, дѣлимъ 1 на послѣднюю дробь:

$$1:\frac{3x+3}{4}=\frac{4}{3x+3}=\frac{4}{3(x+1)}.$$

ГЛАВА X.

Отношеніе и пропорція.

98. Отношеніе. **Отношеніемъ одного значенія величины къ другому значенію той же величины называется число, на которое надо умножить второе значеніе, чтобы получить первое.**

Такъ, отношеніе длины 15 арш. къ длинѣ 3 арш. есть число 5, потому что 15 арш. = 3 арш. $\times$ 5; отношеніе вѣса 1 фунта

къ вѣсу 1 пудъ есть число $^1/_{40}$, потому что 1 фун. $=1$ п. $\times\,^1/_{40}$; отношеніе отвлеченнаго числа 25 къ отвлеченному числу 100 равно $^1/_4$, потому что $25=100\,.\,^1/_4$.

Значенія величины, между которыми разсматривается отношеніе, называются **членами отношенія**, при чемъ первое значеніе есть **предыдущій членъ**, а второе значеніе—**послѣдующій членъ**.

Отношеніе именованныхъ чиселъ можетъ быть замѣнено отношеніемъ отвлеченныхъ чиселъ; для этого достаточно выразить именованныя числа въ одной и той же единицѣ и взять отношеніе получившихся отвлеченныхъ чиселъ. Напримѣръ, отношеніе 10 фун. 16 лот. къ 8 лотамъ равно отношенію 336 лот. къ 8 лот., а это отношеніе равно отношенію отвлеченныхъ чиселъ 336 къ 8.

Въ послѣдующемъ изложеніи мы будемъ говорить только объ отношеніи отвлеченныхъ чиселъ.

Изъ опредѣленія видно, что отношеніе можно разсматривать какъ частное отъ дѣленія предыдущаго члена на послѣдующій. Поэтому отношеніе обозначается посредствомъ знаковъ дѣленія; такъ, отношеніе a къ b обозначается $a:b$ или $\frac{a}{b}$; въ этомъ видѣ отношеніе можно разсматривать, какъ алгебраическую дробь.

Зависимость между членами отношенія и самимъ отношеніемъ та же самая, какая существуетъ между дѣлимымъ, дѣлителемъ и частнымъ; такъ, обозначивъ отношеніе $a:b$ черезъ q, получимъ:

$$a=bq,\quad b=a:q.$$

99. Пропорція. **Равенство, выражающее, что одно отношеніе равно другому отношенію, наз. пропорціей.**

Таковы, напр., равенства:

$$8:4=40:20,\quad (+50):(-10)=(-25):(+5),$$

которыя можно писать и такъ: $\frac{8}{4}=\frac{40}{20}$; $\frac{+50}{-10}=\frac{-25}{+5}$.

Изъ 4 чиселъ, составляющихъ пропорцію, 1-е и 4-е назыв. **крайними** членами, 2-е и 3-е—**средними** членами, 1-е и 3-е—**предыдущими**, 2-е и 4-е—**послѣдующими**.

100. Теорема. Во всякой пропорціи произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ

Для доказательства назовемъ буквою q каждое изъ отношеній пропорціи $a:b=c:d$; тогда $a=bq$ и $d=\frac{c}{q}$. Перемноживъ эти два равенства, найдемъ

$$ad=bq\,.\frac{c}{q}=\frac{bqc}{q}=bc.$$

Отсюда слѣдуетъ: крайній членъ пропорціи равенъ произведенію среднихъ, дѣленному на другой крайній;

средній членъ пропорціи равенъ произведенію крайнихъ, дѣленному на другой средній.

101. Обратная теорема. Если произведеніе двухъ чиселъ (отличныхъ отъ нуля) равно произведенію двухъ другихъ чиселъ, то изъ этихъ 4-хъ чиселъ можно составить пропорцію, беря сомножителей одного произведенія за крайніе, а сомножителей другого произведенія за средніе члены пропорціи.

Док. Пусть даны 4 числа m, n, p и q такія, что

$$mn=pq, \tag{1}$$

при чемъ числа эти отличны отъ нуля. Составимъ новое произведеніе двухъ сомножителей такихъ, чтобы одинъ сомножитель былъ взятъ изъ произведенія mn, а другой — изъ произведенія pq. Такихъ произведеній мы можемъ составить 4:

$$mp,\ mq,\ np \text{ и } nq. \tag{2}$$

Раздѣлимъ обѣ части равенства [1] на каждое изъ составленныхъ нами произведеній [2] (что можно сдѣлать, такъ какъ ни одно изъ этихъ произведеній не равно нулю). Такъ какъ равныя числа при дѣленіи на равныя числа должны дать равныя частныя, то

$$\frac{mn}{mp}=\frac{pq}{mp};\ \frac{mn}{mq}=\frac{pq}{mq};\ \frac{mn}{np}=\frac{pq}{np};\ \frac{mn}{nq}=\frac{pq}{nq}.$$

Сокративъ каждую изъ этихъ дробей, получимъ:

$$\frac{n}{p}=\frac{q}{m};\ \frac{n}{q}=\frac{p}{m};\ \frac{m}{p}=\frac{q}{n};\ \frac{m}{q}=\frac{p}{n}.$$

Эти равенства представляютъ собою тѣ пропорціи, которыя можно составить, если сомножителей одного изъ данныхъ произведеній [1] возьмемъ на крайніе члены, а сомножителей другого произведенія — на средніе члены. Теорема такимъ образомъ доказана.

102. Замѣчаніе. Изъ доказанныхъ двухъ теоремъ можно вывести такое заключеніе: **для того, чтобы 4 числа, данныя въ нѣкоторой послѣдовательности, составляли въ этой послѣдовательности пропорцію, необходимо и достаточно, чтобы произведеніе крайнихъ чиселъ было равно произведенію среднихъ.** Дѣйствительно, это условіе необходимо, такъ какъ безъ него пропорція не можетъ существовать (согласно теоремѣ § 100); это же условіе и достаточно, такъ какъ если оно выполнено, то 4 числа составляютъ пропорцію (§ 101).

103. Перестановки членовъ. Въ каждой пропорціи можно переставлять члены: 1) средніе, 2) крайніе и 3) крайніе на мѣсто среднихъ и средніе на мѣсто крайнихъ. Отъ такихъ перестановокъ пропорція не нарушится, потому что не нарушится равенство между произведеніемъ крайнихъ и произведеніемъ среднихъ.

104. Непрерывная пропорція. Пропорція назыв. непрерывной, если у нея одинаковы оба среднихъ или оба крайнихъ члена. Такова, напр., пропорція:

$$36:12=12:4 \quad \text{или} \quad 12:4=36:12.$$

Повторяющійся членъ непрерывной пропорціи наз. **среднимъ геометрическимъ числомъ** двухъ остальныхъ членовъ этой пропорціи. Изъ пропорціи $a:b=b:c$ находимъ:

$$b^2=ac;\quad \text{откуда:}\quad b=\sqrt{ac},$$

т.-е. **среднее геометрическое двухъ чиселъ равно корню квадрат ному изъ произведенія ихъ.** Такъ, среднее геометрическое чисел 32 и 8 равно $\sqrt{32 \cdot 8} = \sqrt{256} = 16$.

Вообще, среднимъ геометрическимъ n данныхъ чиселъ наз. n-ный корень изъ произведенія всѣхъ этихъ чиселъ; напр., среднее гео метрическое трехъ чиселъ: 8, 32 и 2 есть

$$\sqrt[3]{8 \cdot 32 \cdot 2} = \sqrt[3]{512} = 8.$$

105. Среднее ариѳметическое. Среднимъ ариѳметическимъ n чиселъ наз. $\frac{1}{n}$ часть суммы этихъ чиселъ. Такъ, сред нее ариѳметическое 4-хъ чиселъ: 10, — 2, — 8 и 12 равно

$$\frac{10-2-8+12}{4} = \frac{12}{4} = 3.$$

106. Производныя пропорціи. Такъ называютс пропорціи, которыя можно получить изъ данной пропорці посредствомъ нѣкоторыхъ дѣйствій надъ ея членами.

Пусть имѣемъ пропорцію: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Прибавимъ къ обѣимъ ча стямъ этого равенства или отнимемъ отъ нихъ по 1, отчего, конечно, равенство не нарушится:

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1; \quad \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1.$$

Приведемъ 1 къ общему знаменателю съ дробью, къ которой эта единица прикладывается или отъ которой она вычитается:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{c}{d} + \frac{d}{d} \quad \text{или} \quad \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}; \qquad (1)$$

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{b} = \frac{c}{d} - \frac{d}{d} \quad \text{или} \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}. \qquad (2)$$

Получились равенства, представляющія собою 2 производныя пропорціи; ихъ можно высказать такъ **сумма (или разность) членовъ перваго отношенія относится къ послѣдующему члену того же**

отношенія, какъ сумма (или разность) членовъ второго отношенія относится къ послѣдующему члену этого отношенія.

Раздѣлимъ равенства (1) и (2) на данное равенство $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; тогда знаменатели b и d сократятся, и мы получимъ еще двѣ производныя пропорціи:

$$\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c} \quad (3) \qquad \frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{d}, \qquad (4)$$

которыя можно высказать такъ: сумма (или разность) членовъ перваго отношенія относится къ предыдущему члену того же отношенія, какъ сумма (или разность) членовъ второго отношенія относится къ предыдущему члену этого отношенія.

Раздѣливъ почленно равенство (1) на равенство (2), найдемъ слѣдующую производную пропорцію:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}, \qquad (5)$$

которую можно высказать такъ. **сумма членовъ перваго отношенія относится къ ихъ разности, какъ сумма членовъ второго отношенія относится къ ихъ разности.**

Переставивъ средніе члены въ этихъ производныхъ пропорціяхъ, получимъ еще другія производныя пропорціи, которыя полезно замѣтить:

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{b}{d}, \quad \frac{a-b}{c-d}=\frac{b}{d}, \quad \frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{c}; \quad \frac{a-b}{c-d}=\frac{a}{c}; \quad \frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}.$$

107. Свойство ряда равныхъ отношеній. Пусть имѣемъ рядъ нѣсколькихъ равныхъ отношеній:

$$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}.$$

Обозначимъ черезъ q каждое изъ этихъ отношеній, т. е. положимъ, что $\frac{a}{b}=q$, $\frac{a_1}{b_1}=q$, и т. д. Такъ какъ предыдущій членъ равенъ послѣдующему, умноженному на отношеніе, то:

$$a=bq, \quad a_1=b_1q\ldots \quad a_n=b_nq.$$

Сложимъ эти равенства почленно:

$$a+a_1+a_2+\ldots+a_n=bq+b_1q+b_2q+\ldots b_nq=$$
$$=q(b+b_1+b_2+\ldots+b_n)$$

Раздѣлимъ обѣ части этого равенства на $b+b_1+b_2+\ldots+b_n$:

$$\frac{a+a_1+a_2+\ldots+a_n}{b+b_1+b_2+\ldots+b_n}=q=\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}.$$

Такимъ образомъ: **если нѣсколько отношенiй равны между собою, то сумма всѣхъ предыдущихъ членовъ относится къ суммѣ всѣхъ послѣдующихъ, какъ какой-нибудь изъ предыдущихъ относится къ своему послѣдующему.**

Такъ какъ пропорцiя представляетъ собою два равныя отношенiя, то это свойство примѣнимо также и къ пропорцiи; такъ, если $a:b=c:d$, то $(a+c):(b+d)=a:b=c:d$.

Замѣчанiя. Производными пропорцiями иногда можно пользоваться для скорѣйшаго нахожденiя неизвѣстнаго числа x, входящаго въ пропорцiю. Приведемъ примѣры.

Примѣръ 1. $$\frac{3-x}{x}=\frac{40}{7}.$$

Составимъ производную пропорцiю: сумма членовъ перваго отношенiя относится къ послѣдующему члену того же отношенiя, какъ... Тогда получимъ:

$$\frac{3}{x}=\frac{47}{7};\quad \text{откуда:}\quad x=\frac{21}{47}.$$

Примѣръ 2. $$\frac{a+x}{a-x}=\frac{m}{n}.$$

Составимъ производную пропорцiю: сумма членовъ перваго отношенiя относится къ ихъ разности, какъ... Тогда получимъ:

$$\frac{2a}{2x}=\frac{m+n}{m-n}\quad\text{или}\quad \frac{a}{x}=\frac{m+n}{m-n}.$$

Откуда:

$$x=\frac{a(m-n)}{m+n}.$$

Примѣръ 3. $\frac{a-x}{x}=\frac{x}{b-x}$.

Составимъ новую пропорцію: сумма предыдущихъ относитс[я] къ суммѣ послѣдующихъ, какъ...:

$$\frac{a}{b}=\frac{a-x}{x}.$$

Теперь составимъ производную пропорцію: сумма членов[ъ] перваго отношенія относится къ послѣдующему, какъ...:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{a}{x};\ \text{откуда:}\ x=\frac{ab}{a+b}.$$

ОТДѢЛЪ III.

Уравненія первой степени.

ГЛАВА I.

Общія начала рѣшенія уравненій.

108. Равенство, тождество, уравненіе. Два числа или алгебраическія выраженія, соединенныя между собою знакомъ $=$, составляютъ равенство, при чемъ числа эти или выраженія называются частями равенства: то, что стоитъ налѣво отъ знака $=$, составляетъ лѣвую часть, а то, что стоитъ направо отъ этого знака, составляетъ правую часть равенства. Напримѣръ, въ равенствѣ: $a+2a=3a$ выраженіе $a+2a$ есть лѣвая часть, а $3a$—правая часть.

Если обѣ части равенства представляютъ собою тождественныя алгебраическія выраженія (§ 8), т.-е. такія, которыя при всевозможныхъ численныхъ значеніяхъ буквъ имѣютъ одну и ту же численную величину, то такія равенства наз. тождествами, таковы, напр., равенства:

$$(a+b)m=am+bm;\ (a+1)^2=a^2+2a+1;\ a=a.$$

Тождествомъ наз. также и такое равенство, въ которое входятъ только числа, выраженныя цыфрами, и у которыхъ лѣвая и правая части представляютъ собою одно и то же число; таковы, напр., равенства:

$$(2+1)^2=(5-2)^2,\quad 3=3.$$

Всякое буквенное тождество, послѣ подстановки на мѣсто буквъ какихъ-нибудь чиселъ, обращается въ численное тождество.

Если въ равенство входитъ одна или нѣсколько буквъ такихъ, которымъ для того, чтобы это равенство обратилось въ тождество, нельзя приписывать всевозможныя численныя значенія, а только нѣкоторыя, то такое равенство наз уравненіемъ. Приведемъ 3 примѣра такихъ равенствъ:

1) Равенство $3x+5=2x+7$ есть уравненіе, потому что оно обращается въ тождество (численное) не при всякомъ значеніи буквы x, а только при $x=2$ (при этомъ значеніи оно даетъ. $3.2+5=2.2+7$, т. е. $11=11$).

2) Равенство $2x+y=10x-y$ есть уравненіе, потому что оно обращается въ тождество не при всякихъ значеніяхъ буквъ x и y, а только при нѣкоторыхъ (напр., при $x=2$ и $y=8$ оно даетъ тождество $12=12$, тогда какъ при $x=3$ и $y=8$ оно въ тождество не обращается).

3) Равенство $ax=b$, въ которомъ буквы a и b означаютъ какія-нибудь данныя числа, есть также уравненіе, такъ какъ оно обращается въ тождество (буквенное) не при всякомъ значеніи буквы x, а только при $x={}^b/_a$.

Тѣ буквы въ уравненіи, которымъ нельзя приписывать всевозможныхъ численныхъ значеній, называются неизвѣстными (числами) уравненія; эти буквы берутся обыкновенно изъ послѣднихъ буквъ алфавита. x, y, z...

Уравненія могутъ быть съ однимъ неизвѣстнымъ, съ двумя, тремя и болѣе неизвѣстными. Такъ, равенство $3x+5=2x+7$ есть уравненіе съ 1 неизвѣстнымъ, а равенство $2x+y=10x-y$ есть уравненіе съ двумя неизвѣстными.

Тѣ числа, которыя, подставленныя въ уравненіе вмѣсто его неизвѣстныхъ, обращаютъ это уравненіе въ тождество, называются корнями уравненія или его рѣшеніями; о такихъ числахъ принято говорить, что они удовлетворяютъ уравненію. Напримѣръ, 2 есть корень уравненія $3x+5=2x+7$, потому что при $x=2$ это уравненіе обращается въ тождество $3.2+5=2.2+7$. Уравненіе $2x+y=10x-y$ имѣетъ корни $x=2$, $y=8$ и многіе другіе. Иногда уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ имѣетъ два корня и болѣе; напр., уравненіе $x^2+2=3x$ удовлетворяется при $x=2$ и $x=1$.

Рѣшить уравненіе значитъ найти всѣ его корни.

109. Многія задачи можно рѣшать помощью уравненій. Возьмемъ для примѣра такую задачу:

Старшему брату 15 лѣтъ, а младшему 9. Сколько лѣтъ тому назадъ первый былъ втрое старше второго?

Назовемъ неизвѣстное число лѣтъ буквою x. Предположимъ, что это число найдено, и мы желаемъ повѣрить, удовлетворяетъ ли найденное число требованіямъ задачи. Тогда разсуждаемъ такъ: x лѣтъ тому назадъ старшему брату было не 15 лѣтъ, какъ теперь, а $15-x$; младшему брату тогда было не 9 лѣтъ, какъ теперь, а $9-x$. Условіе задачи требуетъ, чтобы $15-x$ было втрое болѣе $9-x$; значитъ, если $9-x$ умножимъ на 3, то мы должны получить число, равное разности $15-x$; поэтому для x можно взять только такое число, которое удовлетворяетъ уравненію:

$$(9-x)3=15-x.$$

Если сумѣемъ рѣшить это уравненіе, то задача будетъ рѣшена. Мы вскорѣ укажемъ общій способъ рѣшенія подобныхъ уравненій. Теперь же замѣтимъ, что полученное нами уравненіе можно рѣшить такими простыми соображеніями. Такъ какъ произведеніе $(9-x)3$ при всякомъ значеніи x равно $27-3x$, то это уравненіе можно написать такъ:

$$27-3x=15-x.$$

Въ этомъ видѣ лѣвая и правая части уравненія представляютъ собою разности. Сравнивая ихъ между собою, замѣчаемъ, что уменьшаемое въ лѣвой части (т.-е. 27) болѣе уменьшаемаго въ правой части (т.-е. 15) на 12; тогда, чтобы разности были равны, необходимо и достаточно, чтобы и вычитаемое въ лѣвой части (т.-е. $3x$) было болѣе вычитаемаго въ правой части (т.-е. x) тоже на 12; но $3x$ болѣе x на $2x$; слѣд., $2x=12$, откуда: $x=6$.

Значитъ, 6 лѣтъ тому назадъ старшій братъ былъ втрое старше младшаго

Только практика научаетъ, какъ, исходя изъ вопроса и условій задачи, составить одно или нѣсколько уравненій; алгебра имѣетъ цѣлью указать способы рѣшенія уже составленныхъ уравненій. Въ этомъ состоитъ другое весьма важное назначеніе этой науки (см. § 4).

Рѣшеніе уравненій основано на нѣкоторыхъ свойствахъ равенствъ вообще и уравненій въ частности, эти свойства мы теперь и разсмотримъ.

110. Нѣкоторыя свойства равенствъ. Всякое равенство мы можемъ сокращенно выразить такъ. $a = b$, если буквою a обозначимъ численную величину лѣвой части равенства и буквою b численную величину правой его части. Замѣтивъ это, мы можемъ главнѣйшія свойства равенствъ выразить слѣдующими очевидными истинами (мы уже неоднократно пользовались ими раньше):

1°. Если $a = b$, то и $b = a$; т.-е. части равенства можно переставлять.

2°. Если $a = b$ и $c = b$, то $a = c$; т.-е. если два числа равны порознь одному и тому же третьему числу, то они равны и между собою.

3°. Если $a = b$ и $m = n$, то

$$a + m = b + n, \quad a - m = b - n, \quad am = bn;$$

т.-е. если къ равнымъ числамъ придадимъ равныя числа, то и получимъ равныя числа:

если отъ равныхъ (чиселъ) отнимемъ равныя (числа), то и получимъ равныя (числа);

если равныя умножимъ на равныя, то и получимъ равныя.

4°. Если $a = b$ и $m = n$, то $\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$, если только числа m и n не нули (дѣленіе на нуль невозможно, § 36), т.-е. если равныя числа раздѣлимъ на равныя числа, отличныя отъ нуля, то и получимъ равныя числа.

111. Равносильныя уравненія. Уравненія наз. равносильными, если они имѣютъ одни и тѣ же корни. Напр., уравненія:

$$x^2 + 2 = 3x \quad \text{и} \quad x^2 - 3x + 2 = 0$$

равносильны, потому что у нихъ одни и тѣ же корни (именно: $x = 2$ и $x = 1$).

Относительно равносильности уравненій мы докажемъ 2 важныя теоремы, на которыхъ основано рѣшеніе уравненій; при этомъ для простоты мы будемъ предполагать, что рѣчь идетъ

объ уравненіи съ однимъ неизвѣстнымъ (тѣ же самыя разсужденія можно было бы повторить и для уравненія съ нѣсколькими неизвѣстными).

112 Теорема I. **Если къ обѣимъ частямъ уравненія прибавимъ, или отъ нихъ отнимемъ, одно и то же число, то получимъ новое уравненіе, равносильное первому.**

Обозначимъ для краткости лѣвую часть уравненія одною буквою A и правую часть его другою буквою B; если, напр., уравненіе будетъ такое: $x^2+1=3x-1$, то черезъ A мы обозначимъ сумму x^2+1, а черезъ B разность $3x-1$. Пусть m означаетъ какое-нибудь алгебраическое число. Докажемъ, что два уравненія:

$$A=B \quad (1) \qquad \text{и} \qquad A+m=B+m \quad (2)$$

имѣютъ одни и тѣ же корни. Для этого убѣдимся въ слѣдующихъ двухъ предложеніяхъ:

1°. Каждый корень уравненія (1) принадлежитъ и уравненію (2).

Пусть, напр., число 3 будетъ корнемъ уравненія (1). Это значитъ, что если въ этомъ уравненіи на мѣсто x поставимъ число 3, то выраженія A и B сдѣлаются равными числами. Но тогда и суммы $A+m$, $B+m$ также сдѣлаются равными числами, такъ какъ если къ равнымъ числамъ придадимъ равныя числа, то и получимъ равныя. Слѣд., каждый корень ур. (1) удовлетворяетъ и ур. (2).

2°. Обратно каждый корень уравненія (2) принадлежитъ и уравненію (1).

Пусть, напр., число 4 будетъ корнемъ ур. (2). Это значитъ, что если въ этомъ уравненіи на мѣсто x подставимъ число 4, то суммы $A+m$, $B+m$ сдѣлаются равными числами. Но тогда выраженія A и B должны также сдѣлаться равными числами, такъ какъ если отъ равныхъ чиселъ ($A+m$ и $B+m$) отнимемъ равныя числа (m и m), то и получимъ равныя. Значитъ, каждый корень ур. (2) принадлежитъ и ур. (1).

Изъ этихъ двухъ предложеній слѣдуетъ, что уравненія (1) и (2) имѣютъ одни и тѣ же корни, т.-е. они равносильны.

Переходя отъ ур. (2) къ ур. (1), мы замѣчаемъ, что отъ обѣихъ частей уравненія можно отнять одно и то же число m.

Замѣчаніе. Число, прибавляемое къ обѣимъ частямъ уравненія или отнимаемое отъ нихъ, можетъ быть дано въ видѣ какого-нибудь буквеннаго выраженія, при чемъ это выраженіе можетъ содержать въ себѣ и неизвѣстныя уравненія [1]). Напр., къ обѣимъ частямъ ур. $x^2+1=3x-1$ можно прибавить выраженіе $1-3x$, такъ какъ при всякомъ численномъ значеніи x это выраженіе представляетъ собою нѣкоторое опредѣленное число, а отъ прибавленія къ обѣимъ частямъ уравненія одного и того же числа, какъ мы доказали, получается уравненіе равносильное съ даннымъ.

113. Слѣдствія. 1) **Любой членъ уравненія можно перенести изъ одной его части въ другую, перемѣнивъ передъ такимъ членомъ знакъ на противоположный.**

Напр., если къ обѣимъ частямъ уравненія $8+x^2=7x-2$ прибавимъ по 2, то получимъ:

$$\begin{array}{r} 8+x^2=7x-2 \\ +2 \qquad\quad +2 \\ \hline 8+x^2+2=7x \end{array}$$

Такимъ образомъ, членъ -2 изъ правой части даннаго уравненія перешелъ въ лѣвую съ противоположнымъ знакомъ $+$.

Вычтя изъ обѣихъ частей послѣдняго уравненія по x^2, получимъ:

$$\begin{array}{r} 8+x^2+2=7x \\ -x^2 \qquad -x^2 \\ \hline 8+2=7x-x^2 \end{array}$$

Такимъ образомъ, членъ $+x^2$ перешелъ изъ лѣвой части уравненія въ правую съ противоположнымъ знакомъ $-$.

Можно всѣ члены уравненія перенести въ одну его часть, напр., въ лѣвую; въ такомъ случаѣ въ другой части останется 0 Такъ, перенося въ уравненіи $2x^2=4x-6$ члены $4x$ и -6 въ лѣвую часть получимъ:

$$2x^2-4x+6=0.$$

---

1) если, впрочемъ, оно при всѣхъ значеніяхъ неизвѣстныхъ, удовлетворяющихъ данному уравненію, представляетъ собою опредѣленное число (а не принимаетъ, напр., вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{m}{0}$).

2) **Если два одинаковые члена съ одинаковыми знаками стоятъ въ разныхъ частяхъ уравненія, то такіе члены можно отбросить.** Пусть, напр., даны уравненія:

$$6x+3=x^2+3,\quad 7x^2-x=3-x.$$

Отнявъ отъ обѣихъ частей перваго уравненія по 3 и приложивъ къ обѣимъ частямъ второго уравненія по x, получимъ:

$$6x=x^2,\quad 7x^2=3.$$

Такимъ образомъ, члены $+3$ и $+3$ въ первомъ уравненіи и члены $-x$ и $-x$ во второмъ уравненіи уничтожились.

114. Теорема 2. Если обѣ части уравненія умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же число, отличное отъ нуля, то получимъ новое уравненіе, равносильное первому.

Пусть $A=B$ есть данное уравненіе и m какое-нибудь число, кромѣ 0; докажемъ, что два уравненія:

$$A=B\quad (1)\quad \text{и}\quad Am=Bm\quad (2)$$

имѣютъ одни и тѣ же корни. Для этого убѣдимся въ слѣдующихъ двухъ предложеніяхъ:

1°. Каждый корень уравненія (1) принадлежитъ и уравненію (2).

Пусть, напр., число 5 будетъ корнемъ ур. (1). Это значитъ, что при $x=5$ выраженія A и B дѣлаются равными числами. Но тогда и произведенія Am, Bm сдѣлаются равными числами, такъ какъ если равныя числа умножимъ на равныя числа, то и получимъ равныя. Значитъ, каждый корень ур. (1) принадлежитъ и ур. (2).

2°. Обратно: каждый корень уравненія (2) принадлежитъ и уравненію (1).

Пусть, напр., число 6 будетъ корнемъ ур. (2), т.-е. пусть при $x=6$ произведенія Am и Bm дѣлаются равными числами. Но тогда и выраженія A и B должны сдѣлаться равными числами, такъ какъ если равныя числа (Am и Bm) раздѣлимъ на равныя числа, отличныя отъ нуля (а m мы предположили не равнымъ нулю), то и получимъ равныя. Значитъ, каждый корень ур. (2) принадлежитъ и ур. (1).

Изъ этихъ двухъ предложеній слѣдуетъ, что уравненія (1) и (2) равносильны.

Переходя отъ ур. (2) къ ур. (1), мы видимъ, что обѣ части уравненія можно дѣлить на одно и то же число, отличное отъ нуля.

Замѣчаніе. Нельзя умножать обѣ части уравненія на нуль, такъ какъ отъ такого умноженія уравненіе перестаетъ существовать, обращаясь въ тождество: $0=0$. Возьмемъ, напр., уравненіе $2x=8$, и умножимъ обѣ его части на 0:

$$2x=8 \quad (1) \qquad 2x.0=8.0 \quad (2).$$

Уравненіе (1) имѣетъ только одинъ корень, именно $x=4$; уравненіе же (2) удовлетворяется при всякомъ численномъ значеніи x (произведеніе всякаго числа на 0 есть 0); напр., при $x=10$ уравненіе это даетъ: $20.0=8.0$, т.-е. $0=0$, при $x=-3$ оно даетъ: $(-6).0=8.0$, т.-е. $0=0$, и т. д. Такимъ образомъ, отъ умноженія частей уравненія на нуль получается тождество: $0=0$, а не уравненіе.

О дѣленіи обѣихъ частей уравненія на нуль нечего говорить, такъ какъ дѣленіе на 0 вообще невозможно (§ 36).

115. Слѣдствія. 1°. **Если всѣ члены уравненія имѣютъ общаго множителя, не равнаго нулю, то уравненіе можно на него сократить.** Напр.:

$$60x-160=340-40x.$$

Раздѣливъ всѣ члены на 20, получимъ уравненіе болѣе простое:

$$3x-8=17-2x$$

2°. **Передъ всѣми членами уравненія можно перемѣнить знаки на противоположные,** такъ какъ это равносильно умноженію обѣихъ частей уравненія на -1. Напр., умноживъ обѣ части уравненія:

$$-7x+2=-8-x^2$$

на -1, мы получимъ такое равносильное уравненіе:

$$7x-2=8+x^2.$$

3°. Уравненіе можно освободить отъ знаменателей. Напр.:

$$\frac{7x-3}{6}-\frac{x-5}{4}=\frac{43}{6}.$$

Приведемъ всѣ члены къ общему знаменателю:

$$\frac{14x-6}{12}-\frac{3x-15}{12}=\frac{86}{12} \quad \text{или} \quad \frac{14x-6-(3x-15)}{12}=\frac{86}{12}.$$

Отбросивъ общаго знаменателя, мы тѣмъ самымъ умножимъ обѣ части уравненія на одно и то же, отличное отъ нуля, число 12; отъ этого получимъ уравненіе, равносильное данному и не содержащее дробныхъ членовъ:

$$14x-6-(3x-15)=86 \quad \text{или} \quad 14x-6-3x+15=86.$$

116. Можно ли обѣ части уравненія умножить или раздѣлить на одно и то же алгебраическое выраженіе? Разсмотримъ особо слѣдующіе 2 случая:

1°. Пусть алгебраическое выраженіе, на которое мы умножаемъ или дѣлимъ части уравненія, **не содержитъ неизвѣстныхъ.** Напр., пусть это будетъ выраженіе $2a-b$, въ которомъ буквы a и b означаютъ какія-нибудь данныя числа. При всякихъ численныхъ значеніяхъ этихъ буквъ выраженіе $2a-b$ представляетъ собою нѣкоторое опредѣленное число, при чемъ число это не есть нуль, если только $2a$ не равно b. Но мы доказали (§ 114), что отъ умноженія или дѣленія обѣихъ частей уравненія на одно и то же число, отличное отъ нуля, получается уравненіе, равносильное данному, тогда какъ отъ умноженія или дѣленія частей уравненія на 0 равносильнаго уравненія не получается. Значитъ, на выраженіе $2a-b$ можно умножить или раздѣлить обѣ части уравненія, за исключеніемъ лишь случая, когда $2a=b$.

Вообще, обѣ части уравненія можно умножить или раздѣлить на одно и то же алгебраическое выраженіе, не содержащее неизвѣстныхъ, при всѣхъ тѣхъ численныхъ значеніяхъ буквъ, входящихъ въ это выраженіе, при которыхъ оно представляетъ собою какое-нибудь опредѣленное число, отличное отъ 0.

2°. Пусть алгебраическое выраженіе, на которое мы умножаемъ или дѣлимъ части уравненія, содержитъ неизвѣстныя. Напр., пусть обѣ части уравненія: $2x=8$ мы умножили на выраженіе $x-3$. Тогда будемъ имѣть 2 уравненія:

$$2x=8 \quad (1) \quad \text{и} \quad 2x(x-3)=8(x-3) \quad (2).$$

Посмотримъ, будутъ ли они равносильны. Уравненіе (1) имѣетъ только одинъ корень $x=4$. Этотъ корень принадлежитъ и уравненію (2), такъ какъ онъ обращаетъ его въ тождество:

$$2.4(4-3)=8(4-3), \text{ т.-е. } 8.1=8.1.$$

Но уравненіе (2) имѣетъ еще свой особый корень: $x=3$. Дѣйствительно, при этомъ значеніи x, множитель $x-3$ обращается въ нуль, и уравненіе (2) обращается въ тождество:

$$6.0=8.0, \text{ т.-е. } 0=0.$$

Значитъ, уравненіе (1) имѣетъ одинъ корень ($x=4$), тогда какъ уравненіе (2) имѣетъ 2 корня ($x=4$ и $x=3$); изъ этихъ корней послѣдній есть посторонній для даннаго уравненія (1). Такимъ образомъ, уравненія (1) и (2) не равносильны.

Вообще, отъ умноженія или дѣленія обѣихъ частей даннаго уравненія на одно и то же алгебраическое выраженіе, содержащее неизвѣстныя, можетъ получиться уравненіе, не равносильное данному, такъ какъ этимъ умноженіемъ или дѣленіемъ мы можемъ ввести новыя рѣшенія, или, наоборотъ, лишить уравненіе нѣкоторыхъ рѣшеній.

117. Уравненія, содержащія неизвѣстныя въ знаменателяхъ. Чтобы освободить уравненіе отъ знаменателей, нужно, какъ мы говорили (§ 115, 3°), привести всѣ члены уравненія къ общему знаменателю и затѣмъ его отбросить. Теперь мы должны добавить, что такое отбрасываніе общаго знаменателя (равносильное умноженію на него обѣихъ частей уравненія) возможно безъ всякихъ оговорокъ лишь въ томъ случаѣ, когда отбрасываемый знаменатель не содержитъ въ себѣ неизвѣстныхъ. Если же, какъ это часто бываетъ, неизвѣстныя входятъ и въ знаменателей дробныхъ членовъ урав-

ненія, то, приведя всѣ члены къ общему знаменателю и отбросивъ его, мы должны еще изслѣдовать, не вводимъ ли мы тѣмъ самымъ постороннихъ рѣшеній.

Ниже приведены примѣры (§ 119, примѣры 2-й и 3-й), и которыхъ уясняется, какъ слѣдуетъ поступать въ такихъ случаяхъ.

Изложимъ болѣе подробно, какъ слѣдуетъ поступать съ уравненіями, содержащими въ знаменателяхъ неизвѣстныя. Для простоты будемъ говорить лишь объ уравненіяхъ, содержащихъ одно неизвѣстное x. Перенеся всѣ члены уравненія въ лѣвую часть и приведя ихъ къ общему знаменателю, получимъ уравненіе вида:

$$\frac{A}{B}=0,$$

гдѣ A и B суть алгебраическія выраженія (многочлены), цѣлыя относительно x Дробь $\frac{A}{B}$ можетъ равняться нулю только тогда, когда $A=0$[1]) Положимъ, что, рѣшивъ уравненіе $A=0$, мы нашли корни: $x_1=a$, $x_2=b$ и т. д. Подставимъ эти корни въ B. Если ни одинъ изъ нихъ не обратитъ B въ нуль, то всѣ эти корни годны для даннаго уравненія Если же какой-нибудь изъ нихъ, напр., $x_1=a$, обратитъ B въ нуль, то этотъ корень должно подвергнуть испытанію, такъ какъ неопредѣленное выраженіе $\frac{0}{0}$, получаемое въ этомъ случаѣ для дроби $\frac{A}{B}$, можетъ оказаться неравнымъ 0. Чтобы раскрыть истинный смыслъ неопредѣленнаго выраженія (§ 146), замѣтимъ, что въ этомъ случаѣ многочлены A и B дѣлятся на $x-a$ (§ 83, слѣдствіе 2 е), и потому мы можемъ сократить дробь $\frac{A}{B}$ на $x-a$; тогда получимъ новую дробь $\frac{A_1}{B_1}$; если при $x=a$ числитель A_1 равняется 0, а знаменатель B_1 не равенъ 0, то корень $x=a$ годится; если при $x=a$ и A_1 и B_1 равны 0, то этотъ корень надо испытать (по предыдущему); если же при $x=a$ числитель A_1 не равенъ 0, то этотъ корень надо отбросить.

Примѣръ 1-й. $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x^2-4}$.

---

[1]) Мы опускаемъ здѣсь случай, когда $B=\infty$ и, слѣд., $x=\infty$, такъ какъ безконечныя рѣшенія требуютъ особаго разсмотрѣнія, которое въ элементарной алгебрѣ излишне.

Перенеся всѣ члены въ лѣвую часть и приведя ихъ къ общему знаменателю, получимъ:

$$\frac{2x-1}{x^2-4}=0.$$

Дробь, стоящая въ лѣвой части уравненія, несократима. Отбросивъ знаменателя, получимъ:

$$2x-1=0, \text{ откуда } x=\frac{1}{2}.$$

Примѣръ 2-й. $\frac{x^2}{(x-2)^2}+\frac{2}{(x-2)^2}=\frac{1}{x-2}+\frac{2x+2}{(x-2)^2}.$

Перенеся всѣ члены въ лѣвую часть и приведя ихъ къ общему знаменателю, получимъ:

$$\frac{x^2-3x+2}{(x-2)^2}=0.$$

Числитель дроби представляетъ произведеніе $(x-2)(x-1)$; поэтому дробь можно сократить на $x-2$, послѣ сокращенія получимъ:

$$\frac{x-1}{x-2}=0,\ x-1=0, \text{ откуда } x=1.$$

Замѣтимъ, если бы въ этомъ примѣрѣ мы отбросили общаго знаменателя, не перенеся всѣхъ членовъ въ одну часть уравненія, то получили бы лишній корень $x=2$.

ГЛАВА II.

Уравненіе первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

118. Подраздѣленіе уравненій. По числу неизвѣстныхъ уравненія раздѣляются на уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ, съ двумя неизвѣстными, съ тремя и болѣе неизвѣстными. Кромѣ того, уравненія раздѣляются по степенямъ неизвѣстныхъ: уравненія первой степени. уравненія второй степени, и т. д.

Чтобы судить о степени даннаго уравненія, его надо предварительно, посредствомъ нѣкоторыхъ преобразованій, привести къ такому виду, при которомъ правая часть уравненія не содержитъ неизвѣстныхъ, а лѣвая представляетъ собою многочленъ (или одночленъ), цѣлый относительно неизвѣстныхъ. Преобразованія эти въ большинствѣ уже намъ извѣстны; это—

раскрытіе скобокъ, если онѣ есть, освобожденіе уравненія отъ знаменателей, перенесеніе всѣхъ членовъ, содержащихъ неизвѣстныя, въ лѣвую часть уравненія и приведеніе подобныхъ членовъ. Когда всѣ эти преобразованія выполнены, то

степенью уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ наз. показатель при неизвѣстномъ въ томъ членѣ уравненія, въ которомъ этотъ показатель наибольшій;

степенью уравненія съ нѣсколькими неизвѣстными наз. сумма показателей при неизвѣстныхъ въ томъ членѣ уравненія, въ которомъ эта сумма наибольшая.

Напр., ур. $5x^2-3x=4$ есть уравненіе второй степени съ однимъ неизвѣстнымъ, ур. $5x^2y-xy+8x=0$ есть уравненіе третьей степени съ 2 неизвѣстными.

119. Рѣшеніе уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Пусть требуется рѣшить уравненіе:

$$\frac{2(x-5)}{3}=\frac{3(2-x)}{2}-x.$$

Для этого выполнимъ слѣдующія преобразованія:

1°. Раскроемъ скобки: $\frac{2x-10}{3}=\frac{6-3x}{2}-x.$

2°. Освободимся отъ знаменателей: $4x-20=18-9x-6x.$

3°. Перенесемъ неизвѣстные члены въ одну часть, а извѣстные въ другую: $4x+9x+6x=18+20.$

4°. Сдѣлаемъ приведеніе подобныхъ членовъ: $19x=38.$

Если данное уравненіе, какъ взятое нами, первой степени, то послѣ указанныхъ преобразованій оно приведется къ такому виду, при которомъ каждая его часть состоитъ только изъ одного члена, а именно: лѣвая часть состоитъ изъ члена, содержащаго x въ первой степени, а правая изъ члена, не содержащаго x. Если коэффиціентъ при x въ лѣвой части уравненія обозначимъ буквой a, а число, стоящее въ правой части уравненія, буквой b, то можно сказать, что уравненіе 1-й степени

съ 1-мъ неизвѣстнымъ послѣ указанныхъ преобразованій приведется къ виду:

$$ax = b.$$

Такой видъ наз. нормальнымъ видомъ уравненія 1-й степени съ 1 неизвѣстнымъ.

Чтобы рѣшить уравненіе, приведенное къ нормальному виду, надо сдѣлать еще одно послѣднее преобразованіе:

5°. Раздѣлимъ обѣ части уравненія на коэффиціентъ при неизвѣстномъ:

$$\frac{10x}{10} = \frac{20}{10}; \text{ откуда: } x = 2.$$

Такъ какъ каждое изъ указанныхъ преобразованій приводитъ къ уравненію, равносильному съ уравненіемъ не преобразованнымъ, то, значитъ, и послѣднее полученное нами уравненіе ($x = 2$) равносильно съ даннымъ; но ур. $x = 2$, очевидно, имѣетъ корень 2 и притомъ только этотъ одинъ, значитъ, и данное уравненіе должно имѣть тотъ же корень, и притомъ только одинъ.

Найдя корень уравненія, мы должны повѣрить правильность рѣшенія; для этого подставимъ въ данное (не преобразованное) уравненіе вмѣсто x найденное число; если послѣ подстановки получимъ тождество, то уравненіе рѣшено правильно. Такъ, въ нашемъ примѣрѣ, подставивъ на мѣсто x найденное число 2, получимъ:

$$\frac{2(2-5)}{3} = \frac{3(2-2)}{2} - 2, \quad \text{т.-е.} \quad -2 = -2.$$

Значитъ, уравненіе рѣшено правильно.

Само собою разумѣется, что не во всѣхъ случаяхъ потребны всѣ пять указанныхъ преобразованій.

Для уясненія нѣкоторыхъ особенностей при рѣшеніи уравненій разсмотримъ еще слѣдующіе примѣры.

Примѣръ I. Знаменатели не содержатъ неизвѣстнаго.

$$\frac{\frac{8x}{3} - 4}{9} - \frac{5x-3}{6} + x = \frac{7 - \frac{x-3}{2}}{3} - \frac{8}{9}.$$

Для рѣшенія этого уравненія сначала приведемъ члены каждой дроби къ цѣлому виду (см. § 90):

$$\frac{8x-12}{27}-\frac{5x-3}{6}+x=\frac{14-x+3}{6}-\frac{8}{9}.$$

Найдя общаго знаменателя 54, надписываемъ надъ каждымъ членомъ уравненія дополнительнаго множителя:

$$\overset{2}{\frac{8x-12}{27}}-\overset{9}{\frac{5x-3}{6}}+\overset{54}{x}=\overset{9}{\frac{17-x}{6}}-\overset{6}{\frac{8}{9}}.$$

Затѣмъ приводимъ къ общему знаменателю всѣ члены уравненія, отбрасываемъ его и поступаемъ далѣе, какъ обыкновенно:

$$16x-24-45x+27+54x=153-9x-48;$$

$$16x-45x+54x+9x=153-48+24-27;\quad 34x=102,\quad x=3.$$

Повѣрка; $\frac{8-4}{9}-2+3=\frac{7}{3}-\frac{8}{9}$, т.-е. $\frac{13}{9}=\frac{13}{9}$.

Примѣръ 2. Знаменатели содержатъ неизвѣстное, при чемъ отбрасываніе общаго знаменателя не вводитъ посторонняго корня.

$$\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{8}{1-4x^2}=\frac{2x-1}{2x+1}.$$

Чтобы удобнѣе привести всѣ члены этого уравненія къ общему знаменателю, перемѣнимъ въ знаменателѣ второй дроби знаки на противоположные, а чтобы отъ этого не измѣнилась величина дроби, перемѣнимъ знакъ передъ дробью (см. § 91, 2°)

$$\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{8}{4x^2-1}=\frac{2x-1}{2x+1}.$$

Такъ какъ $4x^2-1=(2x+1)(2x-1)$, то это и есть общій знаменатель; дополнительные множители будутъ: для первой дроби $2x+1$, для третьей $2x-1$:

$$(2x+1)^2-8=(2x-1)^2;\quad 4x^2+4x+1-8=4x^2-4x+1;$$
$$8x=8;\quad x=1.$$

Въ этомъ примѣрѣ для освобожденія уравненія отъ знаменателей намъ пришлось откинуть общаго знаменателя $4x^2-1$, т.-е. намъ пришлось обѣ части уравненія умножить на выраженіе $4x^2-1$, содержащее неизвѣстное; тогда слѣдуетъ убѣдиться, не будетъ ли найденный корень $x=1$ постороннимъ, т.-е. не обращаетъ ли онъ въ 0 выраженіе $4x^2-1$, на которое намъ пришлось умножить обѣ части даннаго уравненія. Подставивъ 1 вмѣсто x въ выраженіе $4x^2-1$, мы получаемъ 3, а не 0. Значитъ, найденный корень не есть посторонній. И дѣйствительно, данное уравненіе при $x=1$ обращается въ тождество:

$$\frac{3}{1}+\frac{8}{-3}=\frac{1}{3};\quad 3-2\frac{2}{3}=\frac{1}{3};\quad \frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

Примѣръ 3. Знаменатели содержатъ неизвѣстное, при чемъ отбрасываніе общаго знаменателя вводитъ посторонній корень.

$$3+\frac{1}{x-2}=\frac{4x-7}{x-2}.$$

Освободивъ уравненіе отъ знаменателей, получимъ:

$$3x-6+1=4x-7,\quad 3x-4x=-7+6-1,\quad -x=-2.$$

Умноживъ обѣ части уравненія на -1, найдемъ: $x=2$.

Такъ какъ для освобожденія уравненія отъ знаменателей намъ пришлось умножить обѣ части его на выраженіе $x-2$, содержащее неизвѣстное, то слѣдуетъ рѣшить, не будетъ ли найденный корень постороннимъ. Подставивъ 2 вмѣсто x въ выраженіе $x-2$, получаемъ 0. Изъ этого заключаемъ, что корень

$x = 2$ можетъ быть постороннимъ. Чтобы рѣшить это окончательно, надо сдѣлать подстановку:

$$3 + \frac{1}{0} = \frac{1}{0}.$$

Въ такомъ видѣ равенство ничего не выражаетъ, такъ какъ дѣленіе на 0 невозможно. Значитъ рѣшеніе $x = 2$ является постороннимъ для даннаго уравненія, которое совсѣмъ не имѣетъ корней.

Примѣръ 4. Уравненіе, приводящееся къ тождеству.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - 25 = \frac{5}{6}(x - 30).$$

По освобожденіи отъ знаменателей, получимъ:

$$3x + 2x - 150 = 5(x - 30)$$

или $$5x - 150 = 5x - 150,$$

или $$5x - 5x = 150 - 150, \text{ т.-е. } 0 = 0$$

Это равенство есть тождество, т.-е. оно вѣрно при всякомъ значеніи x. Значитъ, данное уравненіе имѣетъ произвольные корни.

Примѣръ 5. Уравненіе, приводящееся къ невозможному равенству.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5\left(\frac{x}{4} - \frac{x}{12}\right) + 7.$$

По раскрытіи скобокъ и освобожденіи отъ знаменателей, находимъ:

$$6x + 4x = 15x - 5x + 84$$

или $$10x = 10x + 84,$$

или $$10x - 10x = 84, \text{ т.-е. } 0 = 84.$$

Такъ какъ это равенство невозможно, то уравненіе не имѣетъ ни одного корня.

ГЛАВА III.

Система двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными.

120. Нормальный видъ уравненія первой степени съ 2 неизвѣстными. Возьмемъ для примѣра слѣдующее уравненіе:

$$2(2x+3y-5)=\frac{5}{8}(x+3)+\frac{3}{4}(y-4).$$

Съ цѣлью упростить это уравненіе, сдѣлаемъ на немъ тотъ же рядъ преобразованій, какой былъ указанъ раньше для уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ, а именно:

1°. Раскроемъ скобки: $4x+6y-10=\frac{5}{8}x+\frac{15}{8}+\frac{3}{4}y-3$.

2°. Освободимся отъ знаменателей: $32x+48y-80=$ $=5x+15+6y-24$.

3°. Перенесемъ неизвѣстные члены въ одну часть уравненія, а извѣстные въ другую: $32x+48y-5x-6y=15-24+80$.

4°. Сдѣлаемъ приведеніе подобныхъ членовъ: $27x+42y=71$.

Если данное уравненіе съ 2 неизвѣстными есть уравненіе 1-ой степени, то послѣ указанныхъ преобразованій оно приведется къ такому нормальному виду, при которомъ въ лѣвой части уравненія находятся только 2 члена: одинъ съ неизвѣстнымъ x въ первой степени, другой съ неизвѣстнымъ y въ первой степени, правая же часть уравненія состоитъ изъ одного члена, не содержащаго неизвѣстныхъ. Коэффиціенты при x и y нормальнаго вида уравненія могутъ быть или оба положительныя числа, какъ во взятомъ нами примѣрѣ, или оба отрицательныя числа (этого случая, впрочемъ, можно избѣжать, умноживъ всѣ члены уравненія на -1), или одинъ — число положительное, а другой — число отрицательное; членъ, не содержащій неизвѣстныхъ, можетъ быть и положительнымъ числомъ (какъ въ нашемъ примѣрѣ), и отрицательнымъ, и даже

нулемъ. Обозначивъ коэффиціенты при x и y буквами a и b и членъ, не содержащій неизвѣстныхъ, буквою c, мы можемъ нормальный видъ уравненія 1-й степени съ 2-мя неизвѣстными представить такъ:

$$ax + by = c.$$

121. Неопредѣленность одного уравненія съ 2 неизвѣстными. Одно уравненіе съ 2 неизвѣстными, напр., такое: $3x - 5y = 2$, допускаетъ безчисленное множество корней. Дѣйствительно, если вмѣсто одного неизвѣстнаго, напр., y, будемъ подставлять произвольныя числа: 0, 1, 2, 3... то послѣ всякой подстановки будемъ получать уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ x; рѣшивъ это уравненіе, найдемъ для x число, соотвѣтствующее взятой величинѣ y. Если напр., $y = 0$, то получимъ: $3x = 2$, откуда $x = {}^2/_3$; если $y = 1$, то $3x - 5 = 2$, откуда $x = {}^7/_3$, и т. д.

Уравненіе, имѣющее безчисленное множество корней, называется **неопредѣленнымъ**. Одно уравненіе съ 2 неизвѣстными (будетъ ли оно первой степени или какой-нибудь иной) принадлежитъ къ неопредѣленнымъ.

122. Система уравненій. Нѣсколько уравненій съ нѣсколькими неизвѣстными: x, y, z..., составляютъ систему уравненій, если извѣстно, что каждая изъ буквъ x, y, z... должна означать одно и то же число для всѣхъ уравненій. Если, напр., два уравненія:

$$2x - 5 = 3y - 2 \quad \text{и} \quad 8x - y = 2y + 21$$

разсматриваются при томъ условіи, что каждая изъ буквъ x и y должна имѣть одинаковыя численныя значенія для обоихъ уравненій, то такія уравненія образуютъ систему.

Для показанія того, что данныя уравненія образуютъ систему, ихъ обыкновенно пишутъ одно подъ другимъ и слѣва отъ нихъ ставятъ фигурную скобку:

$$\begin{cases} 2x - 5 = 3y - 2 \\ 8x - y = 2y + 21. \end{cases}$$

Рѣшить систему уравненій значитъ найти всѣ числа, которыя удовлетворяютъ этой системѣ (корни уравненій).

Для рѣшенія системы двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными существуетъ нѣсколько способовъ. Всѣ они имѣютъ цѣлью привести два уравненія съ двумя неизвѣстными къ одному уравненію съ однимъ неизвѣстнымъ или, какъ говорятъ, имѣютъ цѣлью исключить одно неизвѣстное.

123. Способъ подстановки. Возьмемъ для примѣра такую систему:

$$\begin{cases} 8x - 5y = -16 \\ 10x + 3y = 17 \end{cases}$$

(каждое уравненіе предварительно приведено къ нормальному виду). Желая исключить x, поступимъ такъ: изъ перваго уравненія опредѣлимъ x въ зависимости отъ другого неизвѣстнаго y (для чего, конечно, надо членъ $-5y$ перенести направо и затѣмъ раздѣлить обѣ части уравненія на 8):

$$x = \frac{5y - 16}{8}.$$

Такъ какъ второе уравненіе должно удовлетворяться тѣми же значеніями неизвѣстныхъ, какъ и первое, то мы можемъ подставить въ него вмѣсто x найденное для него выраженіе, отчего получимъ уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ y:

$$10 \cdot \frac{5y - 16}{8} + 3y = 17.$$

Рѣшимъ это уравненіе:

$$\frac{5(5y - 16)}{4} + 3y = 17; \quad 25y - 80 + 12y = 68; \quad 37y = 148; \quad y = 4;$$

тогда: $$x = \frac{5y - 16}{8} = \frac{5 \cdot 4 - 16}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Мы могли бы, предположивъ x найденнымъ, опредѣлить изъ одного уравненія y въ зависимости отъ x и полученное для y выраженіе подставить въ другое уравненіе.

Правило. Чтобы рѣшить систему двухъ уравненій съ 2 неизвѣстными способомъ подстановки, опредѣляютъ изъ какого-либо уравненія одно неизвѣстное въ зависимости отъ другого, и полученное выраженіе вставляютъ въ другое уравненіе; отъ этого получается одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ; рѣшивъ его, опредѣляютъ это неизвѣстное; подставивъ найденное число въ выраженіе, выведенное раньше для перваго неизвѣстнаго, опредѣляютъ и это другое неизвѣстное.

Замѣчаніе. Этотъ способъ особенно удобенъ тогда, когда коэффиціентъ при исключаемомъ неизвѣстномъ равенъ 1.

124. Способъ сравненія. Пусть имѣемъ ту же систему:

$$\begin{cases} 8x - 5y = -16 \\ 10x + 3y = 17. \end{cases}$$

Желая исключить x, опредѣлимъ это неизвѣстное изъ каждаго уравненія въ зависимости отъ другого неизвѣстнаго y:

$$x = \frac{5y - 16}{8}, \quad (1) \qquad x = \frac{17 - 3y}{10} \quad (2).$$

Такъ какъ въ обоихъ уравненіяхъ неизвѣстныя должны означать одни и тѣ же числа, то мы можемъ полученныя для x два выраженія соединить знакомъ равенства (сравнить ихъ между собою):

$$\frac{5y - 16}{8} = \frac{17 - 3y}{10}.$$

Откуда: $25y - 80 = 68 - 12y$; $37y = 148$; $y = 4$.

Подставивъ это число въ одну изъ формулъ (1) или (2) найдемъ x:

$$x = \frac{5 \cdot 4 - 16}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \text{ или } x = \frac{17 - 3 \cdot 4}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Неизвѣстное x мы могли бы также найти, исключивъ способомъ сравненія y.

Правило. Чтобы изъ двухъ уравненій исключить одно неизвѣстное по способу сравненія, надо изъ каждаго уравненія опредѣлить одно и тоже неизвѣстное въ зависимости отъ другого и полученныя два выраженія соединить знакомъ равенства.

125. Способъ сложенія или вычитанія. Предположимъ сначала, что въ данной системѣ уравненій (приведенныхъ предварительно къ нормальному виду) коэффиціенты при

какомъ-нибудь одномъ и томъ же неизвѣстномъ, напримѣръ, при y, будутъ одинаковы. При этомъ могутъ представиться два случая: или знаки передъ такими коэффиціентами разные, или они одинаковые. Разсмотримъ одновременно оба эти случая. Пусть, напр., данныя системы будутъ такія:

1-я система	2-я система
$\begin{cases} 7x - 2y = 27 \\ 5x + 2y = 33 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x + 8y = 31 \\ 3x + 8y = 25. \end{cases}$

Сложимъ почленно уравненія первой системы и вычтемъ почленно уравненія второй системы:

$\begin{array}{r} 7x - 2y = 27 \\ 5x + 2y = 33 \\ \hline 12x \quad\quad = 60 \end{array}$	$\begin{array}{r} 5x + 8y = \quad 31 \\ -3x \pm 8y = -25 \\ \hline 2x \quad\quad = \quad 6. \end{array}$

Такимъ образомъ, одно неизвѣстное исключилось. Изъ полученныхъ уравненій находимъ:

$$x = \frac{60}{12} = 5 \quad \Big| \quad x = \frac{6}{2} = 3.$$

Вставивъ въ одно изъ данныхъ уравненій вмѣсто x найденное для него число, найдемъ y:

$7 \,.\, 5 - 2y = 27$	$5 \,.\, 3 + 8y = 31$
$y = 4$	$y = 2.$

Возьмемъ теперь систему двухъ уравненій, въ которыхъ коэффиціенты при одномъ и томъ же неизвѣстномъ неодинаковы, напр., такую:

$$\begin{cases} 7x + 6y = 29 \\ -5x + 8y = 10. \end{cases}$$

Мы можемъ исключить изъ этой системы любое изъ двухъ неизвѣстныхъ. Напримѣръ, чтобы исключить y, предварительно преобразуемъ уравненія такъ, чтобы передъ y коэффиціенты оказались одинаковыми. Чтобы достигнуть этого, достаточно обѣ части перваго уравненія умножить на коэффиціентъ при y

во второмъ уравненіи, т.-е. на 8, а обѣ части второго уравненія умножить на коэффиціентъ при y въ первомъ уравненіи, т.-е. на 6:

$$7x + 6y = 29 \text{ (на 8)} \qquad 56x + 48y = 232$$
$$-5x + 8y = 10 \text{ (на 6)} \qquad -30x + 48y = 60.$$

Такимъ образомъ, этотъ случай всегда можно привести къ первому. Послѣ этого остается только сложить или вычесть преобразованныя уравненія. Въ нашемъ примѣрѣ знаки передъ y въ обоихъ уравненіяхъ одинаковы, а потому для исключенія y надо уравненія почленно вычесть:

$$\begin{array}{r} 56x + 48y = 232 \\ \mp 30x \pm 48y = -\ 60 \\ \hline 86x \qquad\quad = 172; \end{array} \text{ откуда } x = 2.$$

Другое неизвѣстное мы можемъ найти или посредствомъ подстановки въ одно изъ данныхъ уравненій вмѣсто x найденнаго для него числа, или исключивъ изъ данной системы неизвѣстное x такимъ же путемъ, какимъ мы сейчасъ исключили y.

Замѣчаніе. Чтобы коэффиціенты передъ y оказались не только равными, но и наименьшими, слѣдуетъ найти наименьшее кратное коэффиціентовъ y, т.-е. въ нашемъ примѣрѣ 6-и и 8-и (это будетъ 24), и умножить обѣ части каждаго уравненія на соотвѣтствующаго дополнительнаго множителя:

$$7x + 6y = 29 \text{ (на 4)} \qquad 28x + 24y = 116$$
$$-5x + 8y = 10 \text{ (на 3)} \qquad -15x + 24y = 30.$$

Вычтя почленно уравненія, получимъ: $43x = 86$, $x = 2$.

Правило. Чтобы изъ двухъ уравненій (приведенныхъ к нормальному виду) исключить одно неизвѣстное по способу сложенія или вычитанія, надо сначала уравнять въ обоихъ уравненіяхъ коэффиціенты при исключаемомъ неизвѣстномъ, а потомъ сложить оба уравненія, если знаки передъ этимъ неизвѣстнымъ разные, или изъ одного уравненія вычесть почленно другое, если знаки передъ исключаемымъ неизвѣстнымъ одинаковые.

126. Для строгаго обоснованія способа сложенія или вычитанія докажемъ слѣдующую теорему.

Теорема. **Если въ системѣ уравненій замѣнимъ какое-нибудь одно изъ нихъ новымъ уравненіемъ, которое получится отъ почленнаго сложенія уравненій системы, то получимъ другую систему, равносильную данной.**

Док. Пусть намъ дана система уравненій:

$$A = B;\quad A_1 = B_1;\quad A_2 = B_2;\ \ldots \tag{1}$$

Сложимъ почленно эти уравненія:

$$A + A_1 + A_2 + \ldots = B + B_1 + B_2 + \ldots$$

и этимъ новымъ уравненіемъ замѣнимъ какое-нибудь одно изъ данныхъ уравненій, напр., 1-е; тогда получимъ другую систему:

$$A + A_1 + A_2 + \ldots = B + B_1 + B_2 + \ldots;\ A_1 = B_1;\ A_2 = B_2;\ \ldots \tag{2}$$

Требуется доказать, что системы (1) и (2) равносильны, т.-е. что онѣ имѣютъ одни и тѣ же корни. Для этого достаточно убѣдиться, что всѣ корни системы (1) принадлежатъ и системѣ (2), и обратно: всѣ корни системы (2) принадлежатъ и системѣ (1).

Пусть система (1) удовлетворяется при $x = a$, $y = b$.... Это значитъ, что при этихъ значеніяхъ неизвѣстныхъ выраженія A, A_1, A_2 . . . дѣлаются соотвѣтственно равными выраженіямъ B, B_1, B_2 . . . Очевидно тогда, что при этихъ значеніяхъ неизвѣстныхъ сумма $A + A_1 + A_2 + \ldots$ дѣлается равной суммѣ $B + B_1 + B_2 + \ldots$; значитъ, эти значенія неизвѣстныхъ удовлетворяютъ системѣ (2). Такимъ образомъ, всѣ корни системы (1) принадлежатъ и системѣ (2).

Обратно, положимъ, что система (2) допускаетъ корни $x = a'$, $y = b'$.. Это значитъ, что при этихъ значеніяхъ неизвѣстныхъ суммы $A + A_1 + A_2 + \ldots$ и $B + B_1 + B_2 + \ldots$ дѣлаются равными между собой, а также и выраженія A_1 и B_1, A_2 и B_2 и т. д. Но тогда очевидно, что при тѣхъ же значеніяхъ неизвѣстныхъ и выраженія A и B сдѣлаются равными, т.-е. удовлетворится и система (1). Значитъ, всѣ корни системы (2) принадлежатъ и системѣ (1).

Отсюда слѣдуетъ, что системы (1) и (2) равносильны.

Замѣчанія. 1°. Прежде чѣмъ складывать почленно уравненія данной системы, можно предварительно умножить члены каждаго изъ нихъ или только нѣкоторыхъ, на какія-нибудь числа, не равныя нулю, такъ какъ послѣ такого умноженія получаются уравненія равносильныя. Въ частности мы можемъ, напр., члены какого-нибудь одного уравненія или нѣсколькихъ уравненій умножить предварительно на -1; другими словами, мы можемъ нѣкоторыя уравненія почленно **вычесть**. Если, напр., въ указанной выше системѣ (1) мы умножимъ на -1 члены второго уравненія, а потомъ всѣ уравненія сложимъ, то получимъ уравненіе

$$A - A_1 + A_2 + \ldots = B - B_1 + B_2 + \ldots,$$

которымъ мы можемъ замѣнить любое изъ уравненій данной системы.

2⁰. Способы подстановки и сравненія могутъ быть разсматриваемы, какъ слѣдствія изъ доказанной теоремы. Положимъ, напр., мы имѣемъ систему:

$$2x-3y=1 \text{ и } 5x+7y=17. \qquad (1)$$

Ее можно замѣнить такою:

$$x=\frac{1+3y}{2},\quad x=\frac{17-7y}{5}, \qquad (2)$$

потому что уравненія послѣдней системы равносильны соотвѣтственно уравненіямъ первой системы. Вычтя почленно уравненія системы (2), мы можемъ, по доказанному, замѣнить ее новою системой:

$$x=\frac{1+3y}{2},\quad 0=\frac{1+3y}{2}-\frac{17-7y}{5}. \qquad (3)$$

Преобразуя второе уравненіе системы (3), мы можемъ представить ее двояко:

$$x=\frac{1+3y}{2},\quad 5\cdot\frac{1+3y}{2}+7y=17 \text{ (способъ подстановки)}$$

или

$$x=\frac{1+3y}{2},\quad \frac{1+3y}{2}=\frac{17-7y}{5} \text{ (способъ сравненія)}.$$

ГЛАВА IV.

Система трехъ и болѣе уравненій первой степени со многими неизвѣстными.

127. Нормальный видъ уравненія первой степени съ 3 неизвѣстными. Если въ уравненіи 1-й степени съ 3 неизвѣстными x, y и z мы сдѣлаемъ тѣ же преобразованія, какія были нами прежде указаны для уравненій съ 1 и 2 неизвѣстными (§§ 110, 117), то мы приведемъ уравненіе къ такому **нормальному виду**, при которомъ въ лѣвой части уравненія находятся только три члена: одинъ съ x, другой съ y и третій съ z (коэффиціентами при этихъ неизвѣстныхъ могутъ быть числа и положительныя, и отрицательныя), а правая часть уравненій состоитъ изъ одного члена, не содержащаго неизвѣстныхъ. Таково, напр., уравненіе $5x-3y-4z=-12$.

Одно уравненіе съ 3 неизвѣстными и система 2 уравненій съ 3 неизвѣстными допускаютъ вообще безчисленное множество корней, потому что въ первомъ случаѣ двумъ неизвѣстнымъ, а во второмъ — одному неизвѣстному можно придавать произвольныя значенія, число которыхъ безконечно велико.

Система трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными можетъ быть рѣшена тѣми же способами, какіе указаны выше для системы двухъ уравненій съ 2 неизвѣстными. Покажемъ примѣненіе этихъ способовъ на слѣдующемъ примѣрѣ (каждое уравненіе предварительно приведено къ нормальному виду):

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 7 \\ 7x + 4y - 8z = 3 \\ 5x - 3y - 4z = -12. \end{cases}$$

128. Способъ подстановки. Изъ одного уравненія, напр., изъ перваго, опредѣлимъ какое-нибудь неизвѣстное, напр., x, въ зависимости отъ другихъ неизвѣстныхъ:

$$x = \frac{7 + 2y - 5z}{3}.$$

Подставимъ это выраженіе въ остальныя уравненія:

$$7 \cdot \frac{7 + 2y - 5z}{3} + 4y - 8z = 3,$$

$$5 \cdot \frac{7 + 2y - 5z}{3} - 3y - 4z = -12.$$

Мы приходимъ, такимъ образомъ, къ двумъ уравненіямъ съ двумя неизвѣстными.

Рѣшивъ ихъ по какому-нибудь изъ способовъ, указанныхъ прежде, найдемъ: $y = 3$, $z = 2$; подставивъ эти числа въ выраженіе для x, выведенное раньше, найдемъ и это неизвѣстное:

$$x = \frac{7 + 2.3 - 5.2}{3} = 1.$$

129. Способъ сравненія. Изъ каждаго уравненія опредѣлимъ одно и то же неизвѣстное въ зависимости отъ двухъ другихъ неизвѣстныхъ. Отъ этого получимъ 3 выраженія для одного и того же неизвѣстнаго. Соединивъ знакомъ = первое выраженіе со вторымъ и первое съ третьимъ (вообще, одно изъ этихъ выраженій съ каждымъ изъ остальныхъ), получимъ два уравненія съ 2 неизвѣстными:

$$x = \frac{7 + 2y - 5z}{3} = \frac{3 - 4y + 8z}{7} = \frac{3y + 4z - 12}{5},$$

$$\frac{7 + 2y - 5z}{3} = \frac{3 - 4y + 8z}{7}; \quad \frac{7 + 2y - 5z}{3} = \frac{3y + 4z - 12}{5}.$$

Рѣшивъ эти два уравненія, получимъ: $y=3$, $z=2$ Вставивъ эти значенія въ одно изъ трехъ выраженій, выведенныхъ раньше для x, найдемъ $x=1$

130. Способъ сложенія или вычитанія. Изъ уравненій 1-го и 2-го исключимъ какое-нибудь неизвѣстное способомъ сложенія или вычитанія; отъ этого получимъ одно уравненіе съ 2 неизвѣстными. Потомъ изъ уравненій 1-го и 3-го (или 2-го и 3-го) тѣмъ же способомъ исключимъ то же неизвѣстное; отъ этого получимъ еще одно уравненіе съ 2 неизвѣстными. Пусть, напр., желаемъ исключить z:

1) $3x-2y+5z=7$	(на 8)	$24x-16y+40z=56$
2) $7x+4y-8z=3$	(на 5)	$35x+20y-40z=15$
		$59x+4y=71$
1) $3x-2y+5z=7$	(на 4)	$12x-8y+20z=28$
3) $5x-3y-4z=-12$	(на 5)	$25x-15y-20z=-60$
		$37x-23y=-32$

Рѣшимъ полученныя два уравненія: $x=1$, $y=3$. Вставимъ эти числа въ одно изъ данныхъ уравненій, напримѣръ, въ первое:

$$3.1-2.3+5z=7;\quad 5z=10;\quad z=2.$$

Замѣчаніе. Для исключенія одного неизвѣстнаго мы брали въ этомъ примѣрѣ 1-е уравненіе со 2-мъ, потомъ 1-е съ 3-мъ; но нѣтъ надобности держаться такого порядка. Можно взять 1-е ур. со 2-мъ, потомъ 2-е съ 3-мъ; или 1-е съ 3-мъ, потомъ 2-е съ 3-мъ, — однимъ словомъ, надо взять какое-нибудь изъ трехъ уравненій съ каждымъ изъ остальныхъ.

131. Примѣненіе этихъ способовъ къ большему числу уравненій. Тѣми же способами можно рѣшить систему 4-хъ ур. съ 4 неизвѣстными, 5-ти ур. съ 5-ю неизвѣстными, и т. д. Пусть вообще намъ дана система n уравненій съ n неизвѣстными. Тогда:

(Способъ подстановки.) Изъ одного уравненія опредѣляютъ какое-нибудь неизвѣстное въ зависимости отъ другихъ неизвѣстныхъ; полученное выраженіе вставляютъ вмѣсто исклю-

чаемаго неизвѣстнаго въ остальныя уравненія. Отъ этого получаютъ $n-1$ уравненій съ $n-1$ неизвѣстными. Съ этою системой поступаютъ точно такъ же. Продолжаютъ исключеніе неизвѣстныхъ до тѣхъ поръ, пока не получится одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ. Рѣшивъ его, находятъ значеніе этого неизвѣстнаго. Вставивъ это значеніе въ формулу, выведенную для того неизвѣстнаго, которое исключили въ послѣдній разъ, получаютъ значеніе другого неизвѣстнаго. Вставивъ эти два значенія въ формулу, выведенную для того неизвѣстнаго, которое исключили въ предпослѣдній разъ, находятъ значеніе третьяго неизвѣстнаго. Продолжаютъ такъ до тѣхъ поръ, пока не будутъ получены значенія всѣхъ неизвѣстныхъ.

(Способъ сравненія.) Изъ каждаго уравненія опредѣляютъ одно неизвѣстное въ зависимости отъ остальныхъ. Получаютъ такимъ образомъ для одного и того же неизвѣстнаго столько выраженій, сколько уравненій, положимъ n. Соединивъ знакомъ $=$ одно изъ такихъ выраженій со всѣми остальными, получаютъ $n-1$ ур. съ $n-1$ неизвѣстными. Съ этою системою поступаютъ точно такъ же.

(Способъ сложенія или вычитанія.) Берутъ два уравненія, напр., первое и второе, исключаютъ изъ нихъ одно неизвѣстное способомъ сложенія или вычитанія (конечно, уравнявъ предварительно коэффиціенты передъ исключаемымъ неизвѣстнымъ). Отъ этого получаютъ одно уравненіе съ $n-1$ неизвѣстными. Потомъ берутъ одно изъ взятыхъ прежде уравненій, напр., второе вмѣстѣ съ какимъ-нибудь изъ остальныхъ, напр., съ третьимъ, и тѣмъ же способомъ исключаютъ изъ нихъ то ж неизвѣстное; отъ этого получаютъ другое уравненіе съ $n-1$ неизвѣстными. Затѣмъ берутъ одно изъ ранѣе взятыхъ уравненій, напр., третье, вмѣстѣ съ однимъ изъ остальныхъ, напр. съ четвертымъ, и исключаютъ изъ нихъ то же самое неизвѣстное; отъ этого получаютъ третье уравненіе съ $n-1$ неизвѣстными. Перебравъ такимъ образомъ всѣ n уравненій, получаютъ $n-1$ ур. съ $n-1$ неизвѣстными. Съ этой системой можн поступать точно такъ же, какъ и съ первой.

ГЛАВА V.

Нѣкоторые частные случаи системъ уравненій.

132. Разсмотримъ нѣкоторые случаи, когда при рѣшеніи системы уравненій полезно отступать отъ общихъ пріемовъ.

1. Случай, когда не всѣ неизвѣстныя входятъ въ каждое уравненіе; напр.:

$$\begin{cases} 10x - y + 3z = 5 \\ 4v - 5x = 6 \\ 2y + 3z = 6 \\ 3y + 2v = 4 \end{cases}$$

Въ этомъ случаѣ система рѣшается быстрѣе, чѣмъ обыкновенно, такъ какъ въ нѣкоторыхъ уравненіяхъ сами собой исключены тѣ или другія неизвѣстныя. Надо только сообразить, какія неизвѣстныя изъ какихъ уравненій слѣдуетъ исключить, чтобы возможно быстрѣе дойти до одного уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ. Исключивъ въ нашемъ примѣрѣ z изъ 1-го и 3-го ур. и v изъ 2-го и 4-го, получимъ два уравненія съ x и y:

$$\begin{array}{rr} 10x - y + 3z = 5 & 4v - 5x = 6 \\ -2y - 3z = -6 & -4v - 6y = -8 \\ \hline 10x - 3y = -1 & -5x - 6y = -2 \end{array}$$

Рѣшивъ эти уравненія, найдемъ: $x = 0,\ y = \frac{1}{3}$.

Теперь вставимъ эти значенія во 2-е и 3-е уравненія:

$$v = \frac{3}{2}, \quad z = \frac{16}{9}.$$

II. Введеніе вспомогательныхъ неизвѣстныхъ. Иногда система уравненій имѣетъ такой видъ, при которомъ она рѣшается сравнительно просто посредствомъ введенія вспомогательныхъ неизвѣстныхъ. Покажемъ это на слѣдующихъ трехъ примѣрахъ

1) $$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{7}{6} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \frac{1}{6} \end{cases}$$ Положимъ, что $$\begin{cases} \frac{1}{x} = x' \\ \frac{1}{y} = y' \\ \frac{1}{z} = z'. \end{cases}$$

Тогда получимъ систему трехъ уравненій съ вспомогательными неизвѣстными x', y' и z':

$$\begin{cases} x' + y' - z' = \frac{7}{6} \\ x' - y' - z' = -\frac{5}{6} \\ y' - x' - z' = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Рѣшивъ эту систему, найдемъ:

$$x' = \frac{1}{2},\ y' = 1,\ z' = \frac{1}{3},$$

т. е. $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{y} = 1$, $\frac{1}{z} = \frac{1}{3}$.

Откуда $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$.

2)
$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{2}{y} - \frac{4}{z} = -13 \\ \frac{6}{x} - \frac{3}{y} - \frac{1}{z} = 5\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{x} + \frac{7}{y} + \frac{2}{z} = 3\frac{1}{2} \end{cases}$$

Дроби $\frac{3}{x}$, $\frac{2}{y}$ и т. п. можн[о] разсматривать, какъ произ[-]веденія $3\cdot\frac{1}{x}$, $2\cdot\frac{1}{y}$ и т. д.

Поэтому, положивъ $\frac{1}{x} = x'$, $\frac{1}{y} = y'$ и $\frac{1}{z} = z'$, получимъ:

$$\begin{cases} 3x' + 2y' - 4z' = -13 \\ 6x' - 3y' - z' = 5\frac{1}{2} \\ -5x' + 7y' + 2z' = 3\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Изъ этихъ уравненій находимъ $x' = 2$, $y' = \frac{1}{2}$, $z' = 5$, послѣ чег[о] получимъ: $x = \frac{1}{2}$, $y = 2$, $z = \frac{1}{5}$.

3)
$$\begin{cases} \frac{1}{2x + 3y - 5} + \frac{7}{5x - 8y + 12} = 1. \\ \frac{4}{2x + 3y - 5} - \frac{14}{5x - 8y + 12} = 1. \end{cases}$$

Введемъ вспомогательныя неизвѣстныя:

$$\frac{1}{2x + 3y - 5} = x'; \quad \frac{1}{5x - 8y + 12} = y'.$$

Тогда получимъ болѣе простую систему:

$$\begin{cases} x' + 7y' = 1 \\ 4x' - 14y' = 1. \end{cases}$$

Рѣшивъ эту систему (напр., способомъ уравненія коэффиціентовъ), найдемъ: $x' = 1/_2$, $y' = 1/_{14}$; слѣдов.:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x+3y-5} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{5x-8y+12} = \dfrac{1}{14} \end{cases} \quad \text{Откуда:} \begin{cases} 2x+3y-5=2 \\ 5x-8y+12=14 \end{cases}$$

или $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 5x-8y=2. \end{cases}$ Эта система даетъ: $x=2$, $y=1$.

III. Сложеніе и вычитаніе уравненій. Напр.:

$\begin{cases} x+y=a \\ y+z=b \\ x+z=c \end{cases}$ Сложивъ всѣ три уравненія, найдемъ сумму трехъ неизвѣстныхъ; вычитая изъ этой суммы каждое уравненіе, найдемъ неизвѣстныя отдѣльно:

$$2(x+y+z)=a+b+c; \quad x+y+z=\frac{a+b+c}{2};$$

$$z=\frac{a+b+c}{2}-a; \quad x=\frac{a+b+c}{2}-b; \quad y=\frac{a+b+c}{2}-c.$$

ГЛАВА VI.

Понятіе о способѣ неопредѣленныхъ множителей.

(Способъ Безу [1]).

133. Система двухъ уравненій съ 2 неизвѣстными. Возьмемъ такую систему въ общемъ видѣ:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c'. \end{cases} \qquad (1)$$

Умножимъ всѣ члены одного уравненія, напр., второго, на нѣкотораго множителя m и затѣмъ сложимъ его съ другимъ уравненіемъ:

$$(a+a'm)x+(b+b'm)y=c+c'm. \qquad (2)$$

---

[1]) Французскій математикъ XVIII столѣтія (1730—1783).

Желая опредѣлить изъ этого уравненія x, придадимъ множителю m такое значеніе, чтобы коэффиціентъ при y обратился въ нуль. Для этого надо для m назначить число, опредѣляемое уравненіемъ:

$$b+b'm=0, \text{ откуда: } m=-\frac{b}{b'}.$$

Тогда уравненіе (2) дастъ $(a+a'm)x=c+c'm$, откуда: $x=\frac{c+c'm}{a+a'm}$.

Подставимъ теперь на мѣсто m его значеніе $-\frac{b}{b'}$.

$$x=\frac{c+c'\left(-\frac{b}{b'}\right)}{a+a'\left(-\frac{b}{b'}\right)}=\frac{c-\frac{c'b}{b'}}{a-\frac{a'b}{b'}}=\frac{\frac{cb'-c'b}{b'}}{\frac{ab'-a'b}{b'}}=\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b}.$$

Для опредѣленія y дадимъ m такое значеніе, которое въ уравненіи (2 обратитъ въ нуль коэффиціентъ при x, т.-е. положимъ, что:

$$a+a'm=0, \text{ откуда: } m=-\frac{a}{a'}.$$

Тогда $$(b+b'm)y=c+c'm,$$

откуда: $$y=\frac{c+c'm}{b+b'm}=\frac{c+c'\left(-\frac{a}{a'}\right)}{b+b'\left(-\frac{a}{a'}\right)}=\frac{a'c-ac'}{a'b-ab'}=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}.$$

134. Система трехъ уравненій съ 3 неизвѣстными. Пусть имѣемъ систему трехъ уравненій:

$$\begin{cases} a\,x+b\,y+c\,z=d \\ a'\,x+b'\,y+c'\,z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases} \qquad (1$$

Умножимъ всѣ члены одного уравненія, напр., перваго, на неопредѣленнаго множителя m, а всѣ члены другого уравненія, напр., второго, на неопредѣленнаго множителя n и затѣмъ сложимъ всѣ три уравненія:

$$(am+a'n+a'')x+(bm+b'n+b'')y+(cm+c'n+c'')z=dm+d'n+d'' \qquad (2$$

Желая опредѣлить x, выберемъ для m и n такія значенія, чтобы въ послѣднемъ уравненіи коэффиціенты при y и z обратились въ нули. Такія значенія найдутся, если рѣшимъ систему:

$$\begin{cases} bm+b'n+b''=0. \\ cm+c'n+c''=0. \end{cases} \qquad (3)$$

Тогда уравненіе (2) дастъ: $$x=\frac{dm+d'n+d''}{am+a'n+a''}. \qquad (4)$$

Такимъ образомъ, рѣшеніе системы (1) трехъ уравненій съ 3 неизвѣстными приводится къ рѣшенію системы (3) двухъ уравненій съ 2 неизвѣстными.

Перенеся въ уравненіяхъ (3) члены b'' и c'' въ правую часть и пользуясь формулами § 133, получимъ:

$$m = \frac{(-b'')c' - b'(-c'')}{bc' - b'c} = \frac{b'c'' - b''c'}{bc' - b'c}$$

$$n = \frac{b(-c'') - (-b'')c}{bc' - b'c} = \frac{b''c - bc''}{bc' - b'c}.$$

Подставивъ эти выраженія въ равенство (4), находимъ:

$$x = \frac{d.\dfrac{b'c'' - b''c'}{bc' - b'c} + d'.\dfrac{b''c - bc''}{bc' - b'c} + d''}{a.\dfrac{b'c'' - b''c'}{bc' - b'c} + a'.\dfrac{b''c - bc''}{bc' - b'c} + a''}$$

Раскроемъ скобки и умножимъ числителя и знаменателя на $bc' - b'c$

$$x = \frac{db'c'' - db''c' + d'b''c - d'bc'' - d''b'c + d''bc'}{ab'c'' - ab''c' + a'b''c - a'bc'' - a''b'c + a''bc'}.$$

Остальныя неизвѣстныя можно найти тѣмъ же способомъ, а именно для опредѣленія y надо m и n выбрать такими, чтобы:

$$\begin{cases} am + a'n + a'' = 0 \\ cm + c'n + c'' = 0, \end{cases} \quad \text{тогда } y = \frac{dm + d'n + d''}{bm + b'n + b''}.$$

Для опредѣленія z надо рѣшить систему:

$$\begin{cases} am + a'n + a'' = 0 \\ bm + b'n + b'' = 0, \end{cases} \quad \text{тогда } z = \frac{dm + d'n + d''}{cm + c'n + c''}.$$

Выполнивъ это, получимъ:

$$y = \frac{da'c'' - da''c' + d'a''c - d'ac'' + d''ac' - d''a'c}{ba'c'' - ba''c' + b'a''c - b'ac'' + b''ac' - b''a'c}.$$

$$z = \frac{da'b'' - da''b' + d'a''b - d'ab'' + d''ab' - d''a'b}{ca'b'' - ca''b' + c'a''b - c'ab'' + c''ab' - c''a'b}.$$

135. Система n уравненій съ n неизвѣстными.

Пусть вообще имѣемъ систему n уравненій 1-й степени съ n неизвѣстными. Умножимъ какія-нибудь $n-1$ уравненій соотвѣтственно на $n-1$ неопредѣленныхъ множителей: m_1, m_2, $m_3 \ldots m_{n-1}$ и затѣмъ сложимъ всѣ уравненія. Отъ этого получимъ одно уравненіе съ n неизвѣстными. Желая затѣмъ опредѣлить какое-нибудь неизвѣстное, напр., x, придадимъ неопредѣленнымъ множителямъ такія значенія, чтобы коэффиціенты при всѣхъ остальныхъ неизвѣстныхъ обратились въ нули. Для этого придется рѣшить $n-1$ уравненій съ $n-1$ неизвѣстными. Эту систему, въ свою очередь, можемъ привести къ системѣ $n-2$ уравненій съ $n-2$ неизвѣстными и т. д.

ГЛАВА VII.

Уравненія неопредѣленныя и несовмѣстныя.

136. Система, въ которой число уравненій равно числу неизвѣстныхъ. Мы видѣли, что всѣ способы рѣшенія системы уравненій первой степени, когда число уравненій равно числу неизвѣстныхъ, приводитъ къ рѣшенію одного уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Но такое уравненіе, какъ мы видѣли на примѣрахъ (§ 110), имѣетъ или одно рѣшеніе, или безчисленное множество рѣшеній (примѣръ 4-й указаннаго параграфа), или ни одного рѣшенія (примѣръ 5-й того же параграфа). Поэтому и система уравненій первой степени, когда число уравненій равно числу неизвѣстныхъ, допускаетъ или одно рѣшеніе, или безчисленное множество рѣшеній (неопредѣленная система), или не имѣетъ ни одного рѣшенія (невозможная система). Примѣры системъ, допускающихъ единственное рѣшеніе, мы уже имѣли прежде; приведемъ теперь примѣры системъ неопредѣленной и невозможной.

Неопред. система.

$$\begin{cases} 2x-3y+z=5 \\ 5x+2y-4z=-1 \\ 9x-4y-2z=9. \end{cases}$$

Невозм. система.

$$\begin{cases} 2x-3y=14 \\ 4x-6y=20. \end{cases}$$

Въ первой системѣ третье уравненіе есть слѣдствіе двухъ первыхъ. Въ самомъ дѣлѣ, если члены перваго уравненія умножимъ на 2, потомъ сложимъ его со вторымъ уравненіемъ, то получимъ третье уравненіе; слѣд., если два первыя уравненія удовлетворяются какими-нибудь значеніями неизвѣстныхъ, то тѣми же значеніями удовлетворяется и третье уравненіе. Но первыя два уравненія, содержа три неизвѣстныя, имѣютъ безчисленное множество рѣшеній; значитъ, система неопредѣленна.

Если станемъ рѣшать эти уравненія, то неопредѣленность обнаружится тѣмъ, что въ концѣ рѣшенія всѣ неизвѣстныя исключатся и получится равенство: $0=0$.

Во второй системѣ второе уравненіе противорѣчитъ первому: если разность $2x-3y$ должна равняться 14, то разность

$4x-6y$, равная $2(2x-3y)$, должна равняться $14\cdot2$, т.-е. 28, а не 20, какъ требуетъ второе уравненіе. Значитъ, предложенная система невозможна. Если станемъ рѣшать эти уравненія, то невозможность обнаружится тѣмъ, что получимъ нелѣпое равенство. Такія уравненія наз. **несовмѣстными.**

137. Система, въ которой число уравненій меньше числа неизвѣстныхъ. Такая система или допускаетъ безчисленное множество рѣшеній, или не имѣетъ ни одного рѣшенія. Пусть, напр., намъ дана система 3 уравненій съ 5 неизвѣстными: x, y, z, t и v. Назначимъ для 2 неизвѣстныхъ, напр., для x и y, произвольныя числа и подставимъ ихъ въ данныя уравненія; тогда получимъ систему 3 уравненій съ тремя неизвѣстными z, t и v; рѣшивъ эту систему (если она окажется возможною и опредѣленною), найдемъ значенія этихъ неизвѣстныхъ, соотвѣтствующія числамъ, взятымъ для x и y. Назначивъ какія-нибудь другія числа для x и y, снова найдемъ соотвѣтствующія значенія для остальныхъ неизвѣстныхъ. Такимъ образомъ, каждой парѣ произвольно выбранныхъ чиселъ для x и y найдемъ соотвѣтствующія значенія остальныхъ трехъ неизвѣстныхъ; значитъ, всѣхъ рѣшеній можетъ быть безчисленное множество.

Можетъ случиться, что уравненія системы окажутся несовмѣстными; тогда система не имѣетъ ни одного рѣшенія.

138. Система, въ которой число уравненій больше числа неизвѣстныхъ, можетъ имѣть рѣшеніе лишь при нѣкоторыхъ соотношеніяхъ между коэффиціентами уравненій. Положимъ, напр., мы имѣемъ систему 7 ур. съ 4 неизвѣстными. Возьмемъ изъ всѣхъ уравненій какія-нибудь 4 и рѣшимъ ихъ (если возможно); тогда мы найдемъ значенія для всѣхъ 4 неизвѣстныхъ. Подставимъ эти значенія въ остальныя 3 уравненія; мы получимъ тогда 3 равенства, которыя могутъ оказаться невозможными. Въ этомъ случаѣ данныя уравненія несовмѣстны. Напр.:

1) $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ 7x+4y=59 \\ 6x-3y=10 \end{cases}$ Рѣшивъ два первыя уравненія, найдемъ: $x=5$ $y=6$. Вставивъ эти значенія въ 3-е уравненіе получимъ невозможное равенство: $12=10$; значитъ, данныя уравненія несовмѣстны.

2) $\begin{cases} ax+by=c \\ mx+ny=p \\ qx+ry=s \end{cases}$ Изъ двухъ первыхъ уравненій находимъ:

$$x=\frac{cn-bp}{an-bm},\quad y=\frac{ap-cm}{an-bm}.$$

Вставимъ эти выраженія въ третье уравненіе; тогда получимъ слѣдующую зависимость между коэффиціентами:

$$\frac{cn-bp}{an-bm}q+\frac{ap-cm}{an-bm}r=s.$$

Если коэффиціенты таковы, что удовлетворяютъ этой зависимости, то система возможна; въ противномъ случаѣ уравненія несовмѣстны.

ГЛАВА IX.

Изслѣдованіе уравненій первой степени.

I. Одно уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ.

139. Что значитъ изслѣдовать уравненіе. Изслѣдовать уравненіе съ буквенными коэффиціентами значитъ разсмотрѣть всѣ особенные случаи, которые могутъ представиться при рѣшеніи его въ зависимости отъ частныхъ значеній буквъ, и уяснить значеніе этихъ случаевъ для той задачи, изъ условій которой уравненіе выведено.

140. Общій видъ уравненія и его рѣшеніе. Мы видѣли (§ 119), что уравненіе первой степени съ 1 неизвѣстнымъ x послѣ надлежащихъ преобразованій приводится къ такому нормальному виду:

$$ax=b,$$

гдѣ a и b суть какія-нибудь алгебраическія числа, не зависящія отъ x. Раздѣливъ обѣ части этого уравненія на коэффиціентъ a, мы получимъ слѣдующее единственное рѣшеніе уравненія:

$$x=\frac{b}{a}.$$

Разсмотримъ, какого рода рѣшенія получаются изъ этой формулы при частныхъ значеніяхъ входящихъ въ нее буквъ.

141. Положительное рѣшеніе. Такое рѣшеніе получается тогда, когда числа b и a одинаковыхъ знаковъ, т.-е. оба они положительныя или оба отрицательныя.

Положительное рѣшеніе вообще показываетъ, что предложенная задача возможна. Впрочемъ, иногда случается, что не всѣ условія задачи выражены въ уравненіи; въ этомъ случаѣ положительное рѣшеніе можетъ и не удовлетворять требованіямъ задачи, и задача окажется невозможной.

Задача. Общество, состоящее изъ 20 человѣкъ, устроило сборъ съ благотворительной цѣлью, при чемъ каждый мужчина внесъ по 3 рубля, а каждая женщина—по 1 руб. Сколько было въ этомъ обществѣ мужчинъ и сколько женщинъ, если весь сборъ составилъ 55 руб.?

Искомое число мужчинъ x; число женщинъ $20-x$; сборъ со всѣхъ мужчинъ $3x$, съ женщинъ $20-x$; по условію задачи:

$$3x+(20-x)=55; \quad \text{откуда: } x=17\frac{1}{2}.$$

Это рѣшеніе удовлетворяетъ уравненію, но не удовлетворяетъ задачѣ, такъ какъ по смыслу ея искомое число должно быть цѣлымъ. Различіе между уравненіемъ и задачею произошло здѣсь оттого, что уравненіе выражаетъ не всѣ требованія задачи, а именно: въ немъ не содержится подразумѣваемаго въ задачѣ требованія, чтобы искомое число было цѣлымъ. Предложенная задача невозможна.

142. Отрицательное рѣшеніе. Такое рѣшеніе получается тогда, когда числа b и a противоположныхъ знаковъ, т.-е. одно изъ нихъ положительное, а другое отрицательное.

Отрицательное рѣшеніе, удовлетворяя уравненію, въ то же время удовлетворяетъ и задачѣ, если величина, выражаемая числомъ x, можетъ быть понимаема въ двухъ противоположныхъ смыслахъ. Въ такомъ случаѣ отрицательное рѣшеніе означаетъ, что эту величину надо брать въ смыслѣ, противоположномъ тому, въ какомъ она берется при положительномъ рѣшеніи; такъ, если положительное рѣшеніе означаетъ время послѣ нѣкотораго событія, то отрицательное рѣшеніе означаетъ

время раньше этого событія; если первое означаетъ разстояніе вправо, то послѣднее — разстояніе влѣво отъ нѣкоторой точки, и т. п.

Если же величина, выражаемая числомъ x, не можетъ быть понимаема въ двухъ противоположныхъ смыслахъ, то отрицательное рѣшеніе означаетъ невозможность задачи.

Задача I. Отцу 40 лѣтъ, а сыну 10 лѣтъ. Черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ въ 7 разъ старше сына?

Обозначимъ искомое число черезъ x. Черезъ x лѣтъ отц будетъ $40+x$, а сыну $10+x$ лѣтъ. По условію:

$$40+x=(10+x)7; \quad \text{откуда: } x=-5.$$

Если вопросъ задачи: «черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ въ 7 разъ старше сына?» понимать буквально, то получившееся отрицательное рѣшеніе надо истолковать такъ: невозможно, чтобы въ будущемъ отецъ когда-либо сдѣлался въ 7 разъ старш сына. Но допустимъ, что, задавая вопросъ задачи, мы имѣл цѣлью опредѣлить то время (тотъ моментъ времени), когда отецъ въ 7 разъ старше сына, независимо отъ того, произойдетъ ли это событіе въ будущемъ, или оно уже произошло въ прошедшемъ. Тогда при рѣшеніи задачи мы должны сдѣлать 2 предположенія:

1) Положимъ, что отецъ будетъ старше сына въ 7 разъ черезъ x лѣтъ; тогда уравненіе окажется то, которое мы выше составили:

$$40+x=(10+x)7. \tag{1}$$

2) Положимъ, что отецъ былъ старше сына въ 7 разъ x лѣтъ тому назадъ; тогда уравненіе окажется другое:

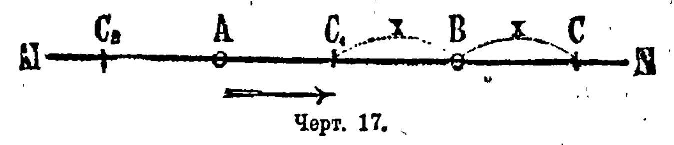
$$40-x=(10-x)7. \tag{2}$$

Не трудно видѣть, что уравненіе (2) можно получить изъ ур. (1), если въ (1) замѣнимъ x на $-x$. Значитъ, можно сказать, что уравненіе (1) соотвѣтствуетъ обоимъ предположеніямъ, если только условимся, что положительное значеніе x означаетъ промежутокъ времени, слѣдующій за настоящимъ моментомъ, а отрицательное значеніе означаетъ промежутокъ времени, предшествующій настоящему моменту. Тогда, получивъ

отрицательное рѣшеніе уравненія (1), именно $x = -5$, мы должны сказать, что отецъ былъ въ 7 разъ старше сына 5 лѣтъ тому назадъ.

Задача 2. Два курьера ѣдутъ въ направленіи отъ M къ N (черт. 17); въ каждый часъ одинъ курьеръ проѣзжаетъ 15 верстъ, другой 12 верстъ. Перваго замѣтили на станціи A въ 12 часов дня, а второго видѣли въ 2 часа того же дня на станціи B отстоящей отъ A на 25 верстъ. Опредѣлить мѣсто, гдѣ один курьеръ догонитъ другого.

Изъ условій задачи прямо не видно, гдѣ расположено тако мѣсто: направо отъ B или налѣво отъ этой точки. Предположимъ что курьеры сошлись направо отъ B, въ нѣкоторой точкѣ C



Черт. 17.

отстоящей отъ B на x верстъ. Первому курьеру отъ A до пришлось проѣхать $25+x$ верстъ, на что ему понадобилос $\frac{25+x}{15}$ часовъ. Второму курьеру отъ B до C пришлось проѣхат x верстъ, на что ему понадобилось $\frac{x}{12}$ часовъ. Изъ условій задач видно, что число часовъ, въ теченіе которыхъ первый курьер проѣхалъ отъ A до C, больше числа часовъ, употребленных вторымъ курьеромъ на проѣздъ отъ B до C, на 2; поэтому:

$$\frac{25+x}{15} - \frac{x}{12} = 2. \qquad (1$$

Такимъ окажется уравненіе въ томъ случаѣ, если курьер сошлись, какъ мы предположили, направо отъ B. Посмотримъ каково будетъ уравненіе, если курьеры сошлись въ нѣкоторо точкѣ C_1, лежащей налѣво отъ B, на разстояніи x верстъ отъ Тогда первый курьеръ проѣхалъ пространство отъ A до C_1 т.-е. $25-x$ верстъ, въ $\frac{25-x}{15}$ часовъ; значитъ, столько часов прошло отъ момента, когда 1-й курьеръ былъ на станціи A

до того момента, когда онъ догналъ 2-го курьера. 2-й курьеръ проѣхалъ путь отъ C_1 до B, равный x верстъ, въ $\frac{x}{12}$ часовъ; значитъ, столько часовъ прошло отъ момента встрѣчи курьеровъ до того момента, когда 2-й прибылъ на станцію B. Но, по условію, 1-й курьеръ выѣхалъ со станціи A въ полдень, а 2-й курьеръ прибылъ на станцію B въ 2 часа дня (а въ промежуткѣ между этими моментами была ихъ встрѣча); значитъ, сумма двухъ временъ:

$$\frac{25-x}{15}\text{ час. и }\frac{x}{12}\text{ час.}$$

должна составить ровно 2 часа:

$$\frac{25-x}{15}+\frac{x}{12}=2. \qquad (2)$$

Легко замѣтить, что уравненіе (2) можно получить изъ ур. (1), если въ послѣднемъ x замѣнимъ на $-x$. Дѣйствительно, такая замѣна даетъ:

$$\frac{25+(-x)}{15}-\frac{-x}{12}=2,\text{ или }\frac{25-x}{15}-\left(-\frac{x}{12}\right)=2,\text{ т.-е. }\frac{25-x}{15}+\frac{x}{12}=2,$$

а это и есть уравненіе (2).

Замѣтивъ это, мы можемъ сказать, что уравненіе (1) включаетъ въ себѣ и уравненіе (2), если только допустимъ, что буква x въ ур. (1) можетъ означать не только положительное число, но и отрицательное. Тогда уравненіе (1) одинаково соотвѣтствуетъ какъ тому предположенію, что курьеры сошлись направо отъ B, такъ и тому, что они сошлись налѣво отъ B. Какое изъ этихъ двухъ предположеній имѣетъ въ дѣйствительности мѣсто, мы увидимъ, рѣшивъ ур. (1): если получимъ положительное рѣшеніе, то будетъ вѣрно первое предположеніе, если отрицательное, то будетъ вѣрно второе предположеніе. Рѣшимъ уравненіе (1):

$$\frac{\overset{4}{\smile}\,25+x}{\underset{}{15}}-\frac{\overset{5}{\smile}\,x}{12}=\overset{60}{\smile}\,2;\quad 100+4x-5x=120;\quad -x=20;\quad x=-20.$$

Значитъ, курьеры сошлись налѣво отъ B въ точкѣ C_1, отстоящей отъ B на 20 верстъ.

Задача 3. Въ двухъ кошелькахъ было 100 руб. Вынувъ изъ одного $1/_2$, а изъ другого $1/_3$ денегъ, находившихся въ нихъ, замѣтили, что въ обоихъ кошелькахъ вмѣстѣ осталось 70 руб. Сколько было денегъ въ каждомъ кошелькѣ?

Въ одномъ кошелькѣ денегъ x руб.; въ другомъ $100-x$ руб. Когда изъ перваго вынули $1/_2$ его денегъ, то въ немъ осталось $1/_2 x$; когда изъ второго вынули $1/_3$ его денегъ, то въ немъ осталось $2/_3$ $(100-x)$; по условію:

$$\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}(100-x)=70.$$

Рѣшимъ это уравненіе:

$$3x+400-4x=420; \quad \text{откуда:} \; -x=20; \quad x=-20.$$

Такъ какъ стоимость денегъ въ кошелькѣ можетъ быть только положительной (или нулемъ), то получившееся отрицательное рѣшеніе означаетъ невозможность задачи.

143. Нулевое рѣшеніе. Если въ формулѣ $x=\frac{b}{a}$ число b сдѣлается равнымъ нулю, при чемъ a не будетъ равно нулю, то x приметъ видъ частнаго $\frac{0}{a}$, которое, по опредѣленію дѣленія, должно равняться нулю. И дѣйствительно, тогда уравненіе $ax=b$ не можетъ имѣть никакого иного корня, кромѣ $x=0$, такъ какъ при $b=0$ оно обращается въ равенство $ax=0$, которое, при a, не равномъ нулю, возможно только, когда $x=0$.

Нулевое рѣшеніе вообще даетъ отвѣтъ на вопросъ задачи.

Задача. Отцу 40 лѣтъ, сыну 10. Черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ въ 4 раза старше сына?

Обозначивъ искомое число буквой x, получимъ:

$$40+x=(10+x)4,$$

откуда:

$$3x=0, \; x=\frac{0}{3}=0.$$

Это рѣшеніе даетъ отвѣтъ на вопросъ задачи: «въ настоящее время отецъ въ 4 раза старше сына».

144. Безконечное рѣшеніе. Если въ формулѣ $x = \frac{b}{a}$ число a обратится въ нуль, то x представится подъ видомъ частнаго $\frac{b}{0}$; если при этомъ число b не есть 0, то для x нельзя получить никакого числа (§ 36, 3°). Въ этомъ случаѣ уравненіе $ax = b$ принимаетъ видъ равенства $0 \,.\, x = b$, которое не удовлетворяется никакимъ числомъ, такъ какъ, какое бы число мы для x ни взяли, произведеніе $0 \,.\, x$ всегда равно 0, тогда какъ число b, по условію, не равно 0.

Невозможность удовлетворить уравненію никакимъ числомъ, конечно, означаетъ и невозможность задачи, изъ условій которой выведено это уравненіе.

Однако недостаточно сказать, что задача въ этомъ случаѣ невозможна; можно еще указать одно важное обстоятельство, которое мы сейчасъ объяснимъ.

Зададимся вопросомъ: какія значенія будетъ получать неизвѣстное, если станемъ измѣнять условія задачи такъ, чтобы знаменатель дроби, выведенной для x, не равнялся нулю, а только уменьшался по абсолютной величинѣ, приближаясь къ нулю? Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, посмотримъ, какъ будетъ измѣняться величина дроби, если абсолютную величину ея знаменателя станемъ приближать къ нулю, а числителя оставимъ безъ перемѣны.

Положимъ, что въ какой-нибудь дроби $\frac{p}{q}$ абсолютная величина знаменателя принимаетъ все меньшія и меньшія значенія, напримѣръ, такія: $^1/_{10}$, $^1/_{100}$, $^1/_{1000}$ и т. д. Тогда абсолютная величина дроби получаетъ такія значенія (если черезъ p' обозначимъ абсолютную величину p):

$$\frac{p'}{\frac{1}{10}} = 10p'; \ \frac{p'}{\frac{1}{100}} = 100p'; \ \frac{p'}{\frac{1}{1000}} = 1000p'; \text{ и т. д.}$$

Отсюда видно, что если p' есть число постоянное, не равное

нулю (хотя бы и очень малое), то абсолютная величина дроби $\frac{p}{q}$, при неограниченномъ уменьшеніи ея знаменателя, все возрастаетъ и можетъ превзойти какое угодно большое число.

Это свойство дроби обыкновенно выражаютъ такъ: дробь, у которой знаменатель равенъ 0, а числитель не равенъ 0, равна безконечности.

Фразу эту нельзя понимать буквально, такъ какъ дробь перестаетъ существовать, когда у нея знаменатель обратится въ 0; фраза выражаетъ только то, что **если абсолютная величина знаменателя дроби уменьшается, приближаясь какъ угодно близко къ нулю, а числитель есть постоянное число, не равное нулю, то абсолютная величина дроби безпредѣльно увеличивается.**

Свойство это письменно выражаютъ такъ:

$$\frac{a}{0}=\infty,$$

гдѣ знакъ ∞ обозначаетъ собою «безконечность».

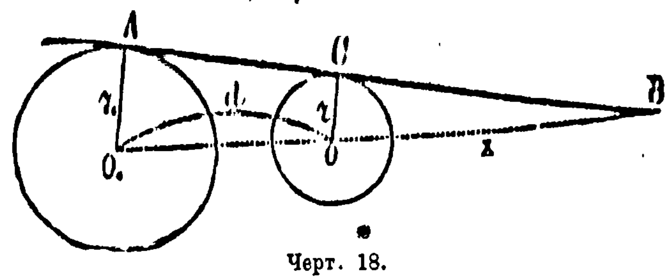
Теперь мы можемъ сказать, что когда въ уравненіи $ax=b$ коэффиціентъ a обращается въ 0, при чемъ число b не равно 0, то уравненіе получаетъ «безконечное рѣшеніе» (∞); оно означаетъ не только то, что задача невозможна, но вмѣстѣ съ тѣмъ и показываетъ, что, по мѣрѣ приближенія къ нулю знаменателя дроби, выведенной для x, абсолютная величина x безпредѣльно увеличивается.

Замѣчаніе I. Если знаменатель, приближаясь къ нулю, имѣетъ одинаковый знакъ съ числителемъ, то дробь, увеличиваясь безпредѣльно, все время остается положительной; если же знаменатель, приближаясь къ нулю, имѣетъ знакъ, противоположный знаку числителя, то дробь все время отрицательна, а абсолютная величина ея увеличивается безпредѣльно. Письменно это выражаютъ такъ:

$$\frac{a}{0}=\pm\infty.$$

Замѣчаніе 2. Изъ свойства дроби находимъ также, что $\frac{a}{\pm\infty} = 0$, т.-е. если абсолютная величина знаменателя возрастаетъ безпредѣльно, а числитель остается постояннымъ, то дробь приближается какъ угодно близко къ нулю.

Задача. Къ двумъ окружностямъ (черт. 18), у которыхъ радіусы суть r и r_1 и разстояніе между центрами d, проведена общая внѣшняя касательная AB. Опредѣлить точку пересѣченія касательной съ линіей центровъ.



Черт. 18.

Обозначимъ черезъ x разстояніе точки пересѣченія до центра ближайшаго круга. Проведя изъ центровъ радіусы къ точкамъ касанія, получимъ два подобныхъ прямоугольныхъ треугольника OBC и O_1BA, изъ которыхъ имѣемъ:

$$x:(d+x) = r:r_1; \quad r_1x = dr + rx;$$

$$r_1x - rx = dr; \quad x = \frac{dr}{r_1 - r}.$$

Если предположимъ, что разность радіусовъ данныхъ круговъ уменьшается, приближаясь къ нулю, то дробь $\frac{dr}{r_1 - r}$ будетъ безпредѣльно увеличиваться, т.-е. точка пересѣченія будетъ неограниченно удаляться отъ центра ближайшаго круга, и общая касательная AB будетъ все болѣе и болѣе приближаться къ параллельности съ линіей центровъ; когда r_1 сдѣлается вполнѣ равнымъ r, тогда разность $r_1 - r$ обратится въ нуль и для x получится «безконечное» значеніе; въ этомъ случаѣ точки пересѣченія совсѣмъ не будетъ, такъ какъ общая касательная окажется параллельной линіи центровъ.

145. Неопредѣленное рѣшеніе. Если въ формулѣ $x = \frac{b}{a}$ каждое изъ чиселъ a и b сдѣлается равнымъ нулю, то x представится подъ видомъ частнаго $\frac{0}{0}$. Это частное, по опредѣленію дѣленія, равняется какому угодно числу (§ 36, 2°) поэтому выраженіе $\frac{0}{0}$ наз. неопредѣленнымъ. И дѣйствительно, уравненіе $ax = b$ въ этомъ случаѣ принимаетъ видъ равенства $0 . x = 0$, которое остается вѣрнымъ при всякомъ значеніи x.

Итакъ, рѣшеніе $a = \frac{0}{0}$ служитъ признакомъ, что уравненіе и задача неопредѣленны, т.-е. допускаютъ безчисленное множество рѣшеній.

Задача. Отцу 40 лѣтъ, сыну 10. Черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ на 30 лѣтъ старше сына?

$$40 + x = 10 + x + 30; \quad 40 + x = 40 + x.$$

Обѣ части уравненія тождественны, и поэтому x можетъ имѣть произвольныя значенія, т.-е. задача неопредѣленна. Рѣшая это уравненіе по общему пріему, получаемъ:

$$x - x = 40 - 40; \quad x(1 - 1) = 0; \quad 0 . x = 0; \quad x = \frac{0}{0}.$$

146. Кажущаяся неопредѣленность. Выраженіе $\frac{0}{0}$ иногда получается оттого, что числитель и знаменатель дроби не сокращены на нѣкотораго множителя, который обращается въ нуль при частныхъ значеніяхъ буквъ. Пусть, напр., мы вывели, что нѣкоторая величина y опредѣляется въ зависимости отъ другой величины x слѣдующей формулой:

$$y = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3}.$$

При всякомъ значеніи x, не равномъ 3, эта формула даетъ для y вполнѣ опредѣленное значеніе, равное суммѣ $x + 3$ (такъ

какъ при $x \neq 3$ дробь, стоящая въ правой части формулы, сокращается на $x-3$). Но при $x=3$ эта формула, принимая неопредѣленный видъ: $y=\frac{0}{0}$, не дастъ для y никакого опредѣленнаго числа. Значитъ, данная формула опредѣляетъ величину y не для всѣхъ численныхъ значеній x, а только для такихъ, которыя больше или меньше 3. Чтобы опредѣлить величину y и для значенія $x=3$, надо къ данной формулѣ добавить еще какое нибудь дополнительное условіе. Каково это условіе, это зависитъ отъ особенностей того вопроса, при рѣшеніи котораго мы вывели нашу формулу. Напр., быть можетъ, вопросъ требуетъ, чтобы величина y опредѣлялась такъ:

$$\text{если } x \neq 3, \text{ то } y=\frac{x^2-9}{x-3}=x+3,$$

$$\text{а если } x=3, \text{ то } y=0$$

(послѣднее условіе и есть дополнительное).

Если никакого особаго дополнительнаго условія не высказано, то обыкновенно подразумѣвается, чтобы и при $x=3$ (мы говоримъ о нашемъ примѣрѣ) величина y выражалась тою формулой, которая получается изъ данной дроби послѣ ея сокращенія на множителя $x-3$ (эта формула при $x=3$ дастъ $y=6$) [1].

Если дополнительное условіе подразумѣвается именно такое, то въ такомъ случаѣ говорятъ, что полученное выраженіе $\frac{0}{0}$ представляетъ кажущуюся неопредѣленность, и за истинное значеніе дроби принимаютъ то опредѣленное ея значеніе, которое получается послѣ сокращенія дроби на множителя, обращающагося въ нуль. Найти такое значеніе значитъ, какъ

[1]) Очень часто дополнительное условіе состоитъ въ томъ, чтобы при томъ значеніи $x=a$, при которомъ дробь, выражающая величину y, принимаетъ неопредѣленный видъ, эта величина равнялась предѣлу, къ которому дробь стремится, когда x неограниченно приближается къ a. Вообще говоря, этотъ предѣлъ и есть то значеніе, которое при $x=a$ принимаетъ дробь послѣ сокращенія на множителя $x-a$. Такъ, въ нашемъ примѣрѣ этотъ предѣлъ есть 6.

принято говорить, раскрыть истинный смыслъ даннаго неопредѣленнаго выраженія.

147. Результаты изслѣдованія. Для ясности выпишемъ всѣ результаты, найденные нами при изслѣдованіи, въ слѣдующей таблицѣ:

Уравненіе: $ax = b$:	формула рѣшенія: $x = \frac{b}{a}$.
$a \neq 0$	$a = 0$
1) Положительное рѣшеніе (b и a одинаковыхъ знаковъ). 2) Отрицательное рѣшеніе (b и a разныхъ знаковъ). 3) Нулевое рѣшеніе ($b = 0$).	4) Ни одного рѣшенія (рѣшеніе безконечное $x = \frac{b}{0} = \pm\infty$). 5) Безконечное множество рѣшеній (неопредѣленное рѣшеніе $x = \frac{0}{0}$).

148. Задача о курьерахъ. Въ заключеніе этой статьи приведемъ изслѣдованіе задачи о курьерахъ, въ которой вторично прослѣдимъ значеніе всѣхъ случаевъ рѣшенія, разсмотрѣнныхъ выше. Эта задача въ численномъ видѣ была рѣшена раньше (§ 142, зад. 2-я). Предположимъ теперь ее въ общемъ видѣ (см. чертежъ на стран. 142):

Два курьера ѣдутъ въ направленіи отъ M къ N; одинъ курьеръ въ каждый часъ проѣзжаетъ v верстъ, другой v_1 верстъ. Послѣдняго видѣли на станціи B спустя h часовъ послѣ того, какъ перваго замѣтили на станціи A, отстоящей отъ B до d верстъ. Опредѣлить мѣсто, гдѣ одинъ курьеръ догонитъ другого (буквы v, v_1, h и d суть ариѳметическія числа).

Такое мѣсто могло находиться или направо отъ B, или налѣво отъ B (при чемъ въ послѣднемъ случаѣ оно могло лежать или между A и B, или налѣво отъ A). Предположимъ первое и обозначимъ черезъ x разстояніе отъ точки встрѣчи C до станціи B). Курьеру, ѣдущему со скоростью v верстъ, пришлось отъ A до C проѣхать $d + x$ верстъ, на что ему потребовалось $\frac{d+x}{v}$ часовъ.

Курьеру, ѣдущему со скоростью v_1, пришлось отъ B до C проѣхать x верстъ, на что ему потребовалось $\frac{x}{v_1}$ часовъ. Изъ условій задачи видно, что

$$\frac{d+x}{v} - \frac{x}{v_1} = h. \qquad (1)$$

Предположимъ теперь, что курьеры сошлись въ нѣкоторой точкѣ C_1, лежащей между A и B на разстояніи x верстъ отъ B. Тогда первый курьеръ отъ A до C_1 проѣхалъ $d-x$ верстъ въ $\frac{d-x}{v}$ часовъ; второй курьеръ отъ C_1 до B проѣхалъ x верстъ въ $\frac{x}{v_1}$ часовъ; изъ условій задачи видно, что сумма этихъ временъ должна равняться h (см. объясненіе въ § 142, задача 2):

$$\frac{d-x}{v} + \frac{x}{v_1} = h. \qquad (2)$$

Наконецъ, допустимъ, что курьеры сошлись въ точкѣ C_2, лежащей налѣво отъ B на разстояніи x, превосходящемъ разстояніе AB, т.-е. число d. Тогда первый курьеръ отъ C_2 до A проѣхалъ $x-d$ верстъ въ $\frac{x-d}{v}$ часовъ, а второй отъ C_2 до B проѣхалъ x вер. въ $\frac{x}{v_1}$ часовъ; изъ условій задачи видно, что $\frac{x}{v_1}$ должно быть болѣе $\frac{x-d}{v}$ на h, т.-е.

$$\frac{x}{v_1} - \frac{x-d}{v} = h. \qquad (3)$$

Сравнивая получившіяся три уравненія, мы прежде всего замѣчаемъ, что уравненіе (3) одинаково съ уравненіемъ (2), такъ какъ его можно преобразовать такимъ образомъ:

$$\frac{x}{v_1} - \frac{-(d-x)}{v} = h;\ \frac{x}{v_1} + \left(\frac{d-x}{v}\right) = h;\ \frac{x}{v_1} + \frac{d-x}{v} = h;$$

а въ этомъ видѣ оно отличается отъ уравненія (2) только поряд-

комъ слагаемыхъ въ лѣвой части. Далѣе мы замѣчаемъ, что изъ уравненія (1) можно получить уравненіе (2) [слѣд., и уравненіе (3)], если въ немъ замѣнимъ x на $-x$. Поэтому мы можемъ сказать, что уравненіе (1) включаетъ въ себѣ и уравненія (2) и (3), если только допустимъ, что буква x въ этомъ уравненіи можетъ быть числомъ и положительнымъ, и отрицательнымъ. Если, рѣшивъ уравненіе (1), мы получимъ положительное число, то это будетъ значить, что курьеры сошлись направо отъ B, если же получимъ отрицательное рѣшеніе, то это покажетъ намъ, что курьеры сошлись налѣво отъ B, при чемъ точка ихъ соединенія окажется лежащей или между A и B, или налѣво отъ A, смотря по тому, какъ велика абсолютная величина x: меньше ли d, или больше d.

Рѣшимъ уравненіе (1):

$$dv_1 + v_1x - vx = hvv_1; \quad (v_1 - v)\,x = hvv_1 - dv_1;$$

$$x = \frac{hvv_1 - dv_1}{v_1 - v} = \frac{v_1\,(vh - d)}{v_1 - v}.$$

Разсмотримъ всѣ различные случаи, которые могутъ представиться при различныхъ значеніяхъ буквъ v, v_1, h и d.

1. **Положительное рѣшеніе** будетъ тогда, когда $vh > d$ и $v_1 > v$, или тогда, когда $vh < d$ и $v_1 < v$. Оно означаетъ, что курьеры сошлись направо отъ B. Что это дѣйствительно, такъ, видно изъ слѣдующихъ соображеній. Произведеніе vh означаетъ пространство, которое проѣхалъ первый курьеръ въ h часовъ; значитъ, оно показываетъ на какое разстояніе этотъ курьеръ удалился отъ станціи A до того момента, когда второй курьеръ былъ замѣченъ въ B. Если $vh > d$, то изъ этого выводимъ, что, когда второй курьеръ былъ въ B, первый уже проѣхалъ эту станцію, и такъ какъ при этомъ $v_1 > v$, то очевидно, что второй курьеръ догонитъ перваго гдѣ-нибудь за станціей B, а не раньше. Точно такъ же если $vh < d$, то это значитъ, что когда второй курьеръ пріѣхалъ въ B, первый еще не доѣхалъ до этой станціи, и такъ какъ при этомъ $v_1 < v$, то очевидно, что первый курьеръ догонитъ второго гдѣ-нибудь направо отъ B, а не раньше.

2. Отрицательное рѣшеніе будетъ тогда, когда $vh > d$, но $v_1 < v$ или же тогда, когда $vh < d$, но $v_1 > v$. Это рѣшеніе показываетъ, что курьеры сошлись налѣво отъ станціи B (между A и B, если абсолютная величина x меньше d, и налѣво отъ A, если абсолютная величина x больше d). И дѣйствительно, при допущенныхъ условіяхъ курьеры должны были сойтись налѣво отъ B, какъ это видно изъ слѣдующихъ соображеній. Если $vh > d$, то второй курьеръ находился въ B тогда, когда первый уже проѣхалъ эту станцію, и такъ какъ при этомъ $v_1 < v$, то второй курьеръ не можетъ догнать перваго на станціи B, а сошелся съ нимъ гдѣ-нибудь раньше. Также если $vh < d$, то второй курьеръ былъ въ B, когда первый еще не доѣхалъ до B, и такъ какъ при этомъ $v_1 > v$, то очевидно, что встрѣча произошла налѣво отъ B.

3. Нулевое рѣшеніе получится, когда $vh = d$, но $v_1 \gtrless v$. Въ этомъ случаѣ курьеры сошлись на станціи B.

4. Безконечное рѣшеніе получится, если $vh \lesseqgtr d$, а $v_1 = v$. Въ этомъ случаѣ курьеры не могли догнать одинъ другого, потому что оба они ѣдутъ съ одинаковой скоростью, а когда второй изъ нихъ былъ въ B, первый или не доѣхалъ до этой станціи, или уже проѣхалъ ее.

Безконечное рѣшеніе еще означаетъ, что если v неограниченно приближается къ равенству съ v_1, то мѣсто соединенія безпредѣльно удаляется отъ B.

5. Неопредѣленное рѣшеніе получится, если $vh = d$ и $v_1 = v$. Въ этомъ случаѣ каждую точку пути можно считать за точку соединенія, такъ какъ курьеры все время ѣдутъ вмѣстѣ; другими словами, задача при этихъ предположеніяхъ становится неопредѣленной.

2. Система двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными.

149. Общія формулы. Систему 2-хъ уравненій 1-й степени съ 2 неизвѣстными мы можемъ въ общемъ видѣ изобразить такъ (§ 120):

$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c'.$$

Рѣшимъ эту систему однимъ изъ способовъ, указанныхъ раньше, предполагая, что ни одинъ изъ 4-хъ коэффиціентовъ a, b, a', b' не равенъ нулю. Примѣнимъ, напр., способъ сложенія или вычитанія.

Умноживъ члены перваго уравненія на b', а члены второго на b, вычтемъ второе уравненіе изъ перваго:

$$\begin{array}{l} ab'x + bb'y = cb' \\ -a'bx - bb'y = -c'b \\ \hline (ab' - a'b)\,x = cb' - c'b \end{array}, \qquad x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}.$$

Умноживъ члены перваго уравненія на a', а второго на a, вычтемъ уравненія почленно:

$$\begin{array}{l} aa'x + ba'y = ca' \\ -aa'x - b'ay = -c'a \\ \hline (ba' - b'a)\,y = ca' - c'a \end{array}, \qquad y = \frac{ca' - c'a}{ba' - b'a}.$$

Знаменателей обѣихъ формулъ можно сдѣлать одинаковыми, если оба члена дроби, полученной для y, умножимъ на -1; тогда получимъ слѣдующія общія формулы:

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}, \qquad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

150. Способъ составленія общихъ формулъ. Полезно запомнить, какъ можно составить формулы для неизвѣстныхъ, не прибѣгая каждый разъ къ ихъ выводу. Знаменатель $ab' - a'b$, одинаковый для обѣихъ формулъ, составленъ изъ коэффиціентовъ:

$$\begin{matrix} a & & b \\ & >< & \\ a' & & b' \end{matrix}$$

перемноженіемъ ихъ крестъ-накрестъ, при чемъ одно произведеніе взято съ $+$, другое съ $-$. Числители формулъ получаются изъ знаменателя замѣною въ немъ коэффиціентовъ опредѣляемаго неизвѣстнаго соотвѣтственно свободными членами c и c'. Чтобы получить, напр., числителя формулы x, надо въ знаменателѣ $ab' - a'b$ замѣнить иксовы коэффиціенты a и a' соотвѣтственно на c и c'; отъ этого получимъ: $cb' - c'b$.

151. Изслѣдованіе. Разсмотримъ особо слѣдующіе 2 случая:

I. **Общій знаменатель $ab'-a'b$ не равенъ нулю.** Въ этомъ случаѣ для каждаго неизвѣстнаго получается единственное рѣшеніе, которое можетъ быть положительнымъ, отрицательнымъ и равнымъ нулю. О значеніи этихъ рѣшеній здѣсь можетъ быть сказано то же самое, что говорилось при изслѣдованіи одного уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ.

II. **Общій знаменатель $ab'-a'b$ равенъ нулю.**

Докажемъ, что тогда:

1°. Если одно неизвѣстное представляется подъ видомъ $\frac{0}{0}$, то и другое неизвѣстное представляется подъ тѣмъ же видомъ.

Пусть, напр., $x=\frac{0}{0}$. Для этого нужно, чтобы

$$cb'=c'b$$
$$ab'=a'b.$$

Перемноживъ эти два равенства крестъ-накрестъ (если равныя помножимъ на равныя, то...), найдемъ:

$cb'a'bc=bab'$; откуда: $cb'a'b-c'bab'=0$, или $bb'(a'c-ac')=0$.

Такъ какъ числа b и b', по предположенію, не равны нулю, то послѣднее равенство возможно только тогда, когда $a'c-ac'=0$; но тогда и $y=\frac{0}{0}$.

Также если допустимъ, что $y=\frac{0}{0}$, т. е. $ac'=a'c$ и $ab=a'b$, то, перемноживъ эти равенства крестъ-накрестъ, найдемъ: $ac'a'b=a'cab'$, откуда $aa'(c'b-cb')=0$. Такъ какъ числа a и a' мы предположили не равными 0, то послѣднее равенство даетъ: $c'b-cb'=0$, а тогда и $x=\frac{0}{0}$.

2°. Если одно неизвѣстное представляется подъ видомъ $\frac{m}{0}$, гдѣ $m\neq 0$, то и другое неизвѣстное представляется подъ

видомъ $\frac{n}{0}$, гдѣ $n \gtrless 0$. Дѣйствительно, если бы оно приняло видъ $\frac{0}{0}$, то и первое неизвѣстное, по доказанному, имѣло бы тотъ же видъ, а мы предположили, что этого нѣтъ.

Рѣшенія: $x = \frac{0}{0}$ и $y = \frac{0}{0}$ означаютъ неопредѣленность задачи. Дѣйствительно, умноживъ всѣ члены перваго уравненія на b', а члены второго на b (что можно сдѣлать, такъ какъ числа b и b', по предположенію, не равны 0), получимъ:

$$\begin{aligned} ab'x + bb'y &= cb' \\ a'bx + b'by &= c'b. \end{aligned} \qquad (A)$$

Если $x = \frac{0}{0}$ и $y = \frac{0}{0}$, то $ab' = a'b$, $cb' = c'b$; тогда два уравненія (A) представляютъ собою одно уравненіе съ 2 неизвѣстными; а въ этомъ случаѣ неизвѣстныя могутъ имѣть безчисленное множество значеній (§ 121).

Рѣшенія: $x = \frac{m}{0}$ и $y = \frac{n}{0}$ означаютъ несовмѣстность уравненій. Въ самомъ дѣлѣ, если $ab' = a'b$, и $cb' \gtrless c'b$, то лѣвыя части уравненія (A) имѣютъ одинаковыя численныя величины а правыя—разныя; значитъ, эти уравненія несовмѣстны, и задача невозможна.

Изъ сказаннаго заключаемъ: система двухъ уравненій первой степени съ 2 неизвѣстными допускаетъ или одно опредѣленное рѣшеніе, или безчисленное множество рѣшеній, или же ни одного рѣшенія.

152. Случай, когда нѣкоторые изъ коэффиціентовъ равны нулю. Въ этомъ случаѣ не слѣдуетъ полагаться на общія формулы, выведенныя для неизвѣстныхъ, а должно подвергать каждый случай особому изслѣдованію. Положимъ, напр., что оба коэффиціента при одномъ и томъ же неизвѣстномъ равны нулю. Пусть $b = b' = 0$; тогда $ab' - a'b = 0$ и $cb' - c'b = 0$, и общія формулы даютъ $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{m}{0}$ или $\frac{0}{0}$, смотря по тому, будетъ ли ac' не равно или равно

$a'c$. Уравненія же въ этомъ случаѣ даютъ

$$\left\{\begin{array}{l} ax + 0.y = c \\ \\ a'x + 0.y = c' \end{array}\right. \quad \text{откуда:} \quad \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{c}{a} \\ x = \dfrac{c'}{a'} \end{array}\right.$$

Если ac' не равно $a'c$, то $\frac{c}{a}$ не равно $\frac{c'}{a'}$, и уравненія невозможны, потому что для x получаются два различныя значенія; между тѣмъ, въ этомъ случаѣ формулы для неизвѣстныхъ даютъ: $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{m}{0}$. Если же $ac' = a'c$ то $\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$, и тогда для x получается опредѣленное рѣшеніе, а y можетъ имѣть всевозможныя значенія, хотя общія формулы въ этомъ случаѣ даютъ $x = \frac{0}{0}$ и $y = \frac{0}{0}$.

ОТДѢЛЪ IV.

Степени и корни.

ГЛАВА I.

Основныя свойства возвышенія въ степень.

153. Опредѣленіе. Произведеніе n одинаковыхъ сомножителей a наз. n-ою степенью числа a.

Такъ, произведеніе 2.2.2 (равное 8) есть 3-я степень числа 2 произведеніе (— 3)(— 3) (равное + 9) есть 2-я степень числа — 3 произведеніе $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ (равное $\frac{1}{16}$) есть 4 я степень числа $\frac{1}{2}$.

Вторая степень наз. иначе квадратомъ, а третья — кубомъ.

Дѣйствіе, посредствомъ котораго находится n-ая степень числа a, наз. возвышеніемъ числа a въ n-ую степень [1]).

n-ая степень числа a обозначается такъ: a^n. Изъ опредѣленія видно, что это выраженіе равносильно произведенію n сомножителей: $a.a.a.a....$

Повторяющійся сомножитель (a) наз. основаніемъ степени или возвышаемымъ числомъ; число (n) одинаковыхъ сомножителей наз. показателемъ степени.

По смыслу опредѣленія видно, что показатель степени есть число цѣлое положительное. Впрочемъ, ради обобщенія условно допускаютъ степени съ показателемъ 0, разумѣя при этомъ, что выраженіе a^0 означаетъ частное $a^m : a^m$ равное 1 [2]).

---

[1]) Такъ какъ это дѣйствіе представляетъ собою частный случай умноженія, то оно всегда возможно и всегда однозначно.

[2]) Впослѣдствіи мы введемъ еще понятіе о дробныхъ и отрицательныхъ показателяхъ.

154. Правило знаковъ. Мы видѣли (§ 31), что произведеніе, въ которое входятъ отрицательные сомножители, оказывается положительнымъ въ томъ случаѣ, когда число такихъ сомножителей четное, и отрицательнымъ въ томъ случаѣ, когда число ихъ нечетное. Примѣняя это свойство къ произведенію одинаковыхъ сомножителей, т.-е. къ степени, мы находимъ слѣдующее правило знаковъ:

отъ возвышенія отрицательнаго числа въ степень съ четнымъ показателемъ получается положительное число, а съ нечетнымъ показателемъ—отрицательное.

Такъ: $(-5)^2=(-5)(-5)=+25$; $(-2)^3=(-2)(-2)(-2)=-8$; и т. п.

155. Возвышеніе въ степень произведенія, частнаго и степени. Это возвышеніе выполняется согласно слѣдующимъ тремъ теоремамъ.

Теорема 1. **Чтобы возвысить въ степень произведеніе, достаточно возвысить въ эту степень каждаго сомножителя отдѣльно.**

Пусть требуется найти $(abc)^2$, т.-е. требуется возвысить произведеніе abc въ квадратъ. Это значитъ, что требуется abc умножить на abc. Такъ какъ произведеніе abc есть одночленъ, а при умноженіи одночленовъ показатели одинаковыхъ буквъ складываются, то

$$(abc)^2=(abc)(abc)=a^{1+1}b^{1+1}c^{1+1}=a^2b^2c^2.$$

Вообще:

$$(abc)^n=(abc)(abc).....=a^{1+1+\cdots}b^{1+1+\cdots}c^{1+1+\cdots}=a^nb^nc^n.$$

Теорема 2. **Чтобы возвысить степень въ степень, достаточно перемножить показателей этихъ степеней.**

Пусть, напр., требуется возвысить a^2 въ кубъ, т.-е. требуется найти произведеніе $a^2.a^2.a^2$. При умноженіи показатели одинаковыхъ буквъ складываются; поэтому:

$$(a^2)^3=a^2.a^2.a^2.=a^{2+2+2}=a^{2\cdot 3}=a^6.$$

Вообще: $(a^m)^n=a^ma^ma^m...=a^{m+m+m+\cdots}=a^{mn}$.

Теорема 3. **Чтобы возвысить въ степень дробь, достаточно возвысить въ эту степень отдѣльно числителя и знаменателя.**

Дѣйствительно, согласно правилу умноженія дробей:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots = \frac{aaa\ldots}{bbb\ldots} = \frac{a^n}{b^n}.$$

156. Замѣчаніе. Легко убѣдиться, что теоремы эти примѣнимы и къ нулевому показателю. Такъ:

$$(abc)^0 = a^0b^0c^0 = 1.1.1 = 1; \quad (a^n)^0 = a^{n\cdot 0} = a^0 = 1.$$

157. Возвышеніе въ степень одночленовъ. Пусть требуется возвысить одночленъ $-3a^2b^3c$ въ n-ую степень. Примѣняя теорему 1-ю, а затѣмъ 2-ю, получимъ:

$$(-3a^2b^3c)^n = (-3)^n(a^2)^n(b^3)^nc^n = (-3)^na^{2n}b^{3n}c^n.$$

Правило. Чтобы возвысить въ степень одночленъ, достаточно возвысить въ эту степень его коэффиціентъ и показателей буквъ умножить на показателя степени.

Примѣры.

1) $(-2x^2y^3z^4)^3 = -8x^6y^9z^{12}$; 2) $(-3ab^2c^3)^4 = 81a^4b^8c^{12}$;

3) $\left(\frac{-3a^nb^2}{4cd^{r-1}}\right)^3 = \frac{(-3a^nb^2)^3}{(4cd^{r-1})^3} = \frac{-27a^{3n}b^6}{64c^3d^{3r-3}} = -\frac{27a^{3n}b^6}{64c^3d^{3r-3}}.$

ГЛАВА II.

Возвышеніе въ квадратъ многочленовъ.

158. Теорема. Квадратъ многочлена равенъ: квадрату 1-го члена + удвоенное произведеніе 1-го члена на 2-й + квадратъ 2-го члена + удвоенное произведеніе суммы первыхъ двухъ членовъ на 3-й + квадратъ 3-го члена + удвоенное произведеніе суммы первыхъ трехъ членовъ на 4-й + квадратъ 4-го члена и т. д.

т.-е. $(a+b+c+d+\ldots)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2 + \ldots$

Док. Возвысимъ сначала въ квадратъ двучленъ $a+b$:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Теперь приложимъ къ суммѣ $a+b$ третій членъ c и возвысимъ въ квадратъ трехчленъ $a+b+c$, разсматривая его, какъ двучленъ, въ которомъ первый членъ есть $a+b$, а второй членъ c:

$$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2.$$

Замѣнивъ въ этомъ выраженіи $(a+b)^2$ черезъ $a^2+2ab+b^2$ получимъ:

$$(a+b+c)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2.$$

Приложивъ пятѣмъ четвертый членъ d и принявъ сумму $a+b+c$ за одночленъ, получимъ, подобно предыдущему:

$$(a+b+c+d)^2=[(a+b+c)+d]^2=(a+b+c)^2+2(a+b+c)d+$$
$$+d^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2.$$

Продолжая такимъ образомъ прикладывать по одному члену, замѣтимъ, что съ каждымъ прибавленіемъ одного новаго члена въ квадратѣ многочлена прибавляются два члена: 1) удвоенное произведеніе суммы всѣхъ прежнихъ членовъ на новый членъ и 2) квадратъ этого новаго члена; значитъ, доказываемая теорема примѣнима къ многочленамъ съ какимъ угодно числомъ членовъ.

159. Другое выраженіе для квадрата многочлена. Раскрывъ скобки въ правой части выведеннаго нами равенства и измѣнивъ порядокъ членовъ, получимъ:

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+$$
$$+2bc+2bd+2cd,$$

что можно высказать такъ: квадратъ многочлена равенъ суммѣ квадратовъ всѣхъ его членовъ и удвоенныхъ произведеній перваго члена на второй, перваго члена на третій, перваго члена на четвертый и т. д.; затѣмъ второго члена на третій, второго члена на четвертый и т. д.; затѣмъ третьяго члена на четвертый и т. д. Короче сказать:

квадратъ многочлена равенъ алгебраической суммѣ квадратовъ его членовъ и всѣхъ удвоенныхъ произведеній, которыя можно составить, умножая каждый членъ многочлена на каждый членъ изъ тѣхъ, которые слѣдуютъ за нимъ.

160. Замѣчаніе о знакахъ. Многочленъ $a+b+c\ldots$ представляетъ собою алгебраическую сумму, т.-е. члены его

могутъ быть числами положительными, отрицательными и нулемъ. Полезно замѣтить, что послѣ возвышенія многочлена въ квадратъ со знакомъ + окажутся, во-1-хъ, квадраты всѣхъ членовъ, и, во-2-хъ, тѣ удвоенныя произведенія, которыя произошли отъ умноженія членовъ съ одинаковыми знаками; со знакомъ же — окажутся тѣ удвоенныя произведенія, которыя произошли отъ умноженія членовъ съ разными знаками. Напр.:

$$(3x^2-2x+1)^2=(3x^2)^2+(2x)^2+1^2-2(3x^2)(2x)+2(3x^2).1-2(2x)1=$$
$$=9x^4+4x^2+1-12x^3+6x^2-4x=9x^4-12x^3+10x^2-4x+1.$$

ГЛАВА III.

Основныя свойства извлеченія корня.

161. Опредѣленіе. Корнемъ *n*-ой степени изъ числа *a* наз. такое число, *n*-ая степень котораго равна *a*.

Такъ, корень 2-й степени изъ $+49$ есть $+7$, а также и -7, потому что $(+7)^2=+49$ и $(-7)^2=+49$; корень 3-й степени изъ -125 есть -5, потому что $(-5)^3=-125$; корень *n*-й степени изъ числа 0 есть 0, потому что $0^n=0$.

Замѣтимъ, что вмѣсто «корень *n*-ой степени» говорятъ иногда короче: «*n*-ый корень».

Число *n*, означающее, какой степени извлекается корень, наз. показателемъ корня; число это мы будемъ всегда предполагать *цѣлымъ* и *положительнымъ*.

Корень обозначается знакомъ $\sqrt{\ }$ (знакъ радикала) [1]; подъ горизонтальной чертой его пишутъ число, изъ котораго корень отыскивается, а надъ отверстіемъ угла ставятъ показателя корня; такъ, выраженіе $\sqrt[3]{27}$ означаетъ корень третьей

---

[1]) Знакъ $\sqrt{\ }$ произошелъ, по всей вѣроятности, изъ точки, которую въ 15 столѣтіи нѣкоторые авторы ставили передъ числомъ, изъ котораго надо извлечь корень. Въ началѣ 16-го столѣтія точку удлинили въ черту. Въ 17-мъ столѣтіи окончательно взошло въ употребленіе теперешнее обозначеніе корня.

степени изъ 27. Показателя корня второй степени принято опускать; напр., $\sqrt{16}$ замѣняетъ обозначеніе $\sqrt[2]{16}$.

Корень второй степени наз. иначе **квадратнымъ**, а корень третьей степени—**кубичнымъ**.

Число, стоящее подъ знакомъ радикала, наз. **подкореннымъ числомъ**.

Дѣйствіе, посредствомъ котораго отыскивается корень данной степени, наз. **извлеченіемъ корня**; это дѣйствіе, какъ видно изъ опредѣленія, обратно возвышенію въ степень [1]).

Изъ опредѣленія корня слѣдуетъ:

$$(\sqrt{a})^2 = a,\ (\sqrt[3]{a})^3 = a,\ \ldots\ldots\ (\sqrt[n]{a})^n = a;$$
$$\sqrt{a^2} = a,\ \sqrt[3]{a^3} = a\ \ldots\ldots\ \sqrt[n]{a^n} = a,$$

т.-е. возвышеніе въ степень и извлеченіе корня (той же степени) суть дѣйствія, взаимно уничтожающіяся.

162. Ариѳметическій корень. Условимся называть корень ариѳметическимъ въ томъ случаѣ, когда онъ извлекается изъ положительнаго числа и самъ представляетъ собою положительное число. Такимъ образомъ, корень изъ отрицательнаго числа (напр., корень кубичный изъ -125) мы не будемъ называть ариѳметическимъ; *равнымъ образомъ мы не будемъ называть ариѳметическимъ* отрицательное значеніе корня изъ положительнаго числа (напр., отрицательное значеніе квадратнаго корня изъ $+49$).

Такъ какъ положительныя числа мы не различаемъ отъ ариѳметическихъ, то можно также сказать, что ариѳметическій корень есть корень изъ ариѳметическаго числа, выраженный тоже ариѳметическимъ числомъ.

163. Нѣкоторыя свойства ариѳметическаго корня. Укажемъ слѣдующія 3 свойства ариѳметическаго корня:

---

[1]) Дѣйствіе это, какъ увидимъ ниже (§ 165, IV), не всегда возможно; кромѣ того оно не однозначно (см., напр., § 246).

I. Если цѣлое число N не есть m-ая степень никакого цѣлаго числа, то $\sqrt[m]{N}$ не можетъ быть выраженъ ни цѣлымъ, ни дробнымъ числомъ.

Напримѣръ, число 5 не есть квадратъ никакого цѣлаго числа; тогда $\sqrt{5}$ не можетъ быть выраженъ ни цѣлымъ, ни дробнымъ числомъ. Докажемъ это свойство въ общемъ видѣ.

Если число N не есть m-ая степень никакого цѣлаго числа, то это значитъ, что $\sqrt[m]{N}$ не равенъ никакому цѣлому числу. Докажемъ, что онъ при этомъ не можетъ равняться и никакой дроби. Предположимъ противное, т.-е. допустимъ, что существуетъ нѣкоторая дробь, m-ая степень которой равна N; пусть эта дробь, по сокращеніи ея, есть $\frac{a}{b}$. Тогда, согласно правилу возвышенія въ степень дроби, будемъ имѣть:

$$N = \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

Это равенство возможно только тогда, когда a^m дѣлится безъ остатка на b^m, для чего необходимо, чтобы всѣ простые множители степени b^m входили въ число простыхъ множителей степени a^m. Но простые множители степени b^m суть тѣ, которые входятъ въ составъ основанія b (только повторенные m разъ); то же самое можно сказать о степени a^m; числа же a и b не имѣютъ общихъ множителей (такъ какъ въ противномъ случаѣ дробь $\frac{a}{b}$ могла бы сократиться). Значитъ, написанное выше равенство невозможно, и потому нельзя допустить, чтобы существовала дробь, m-ая степень которой равна числу N.

II. Если числитель или знаменатель ариѳметической несократимой дроби $\frac{a}{b}$ не есть m-ая степень никакого цѣлаго числа, то $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ не можетъ быть выраженъ ни цѣлымъ, ни дробнымъ числомъ.

Напр., въ несократимой дроби $^5/_9$ числитель не есть квадратъ никакого цѣлаго числа; въ такомъ случаѣ $\sqrt{\frac{5}{9}}$ не можетъ

равняться ни цѣлому, ни дробному числу; въ несократимо дроби $^8/_9$ знаменатель не есть кубъ никакого цѣлаго числа въ такомъ случаѣ $\sqrt[3]{\frac{8}{9}}$ не можетъ равняться ни цѣлому, н дробному числу. Докажемъ это свойство въ общемъ видѣ.

Корень изъ дроби не можетъ равняться цѣлому числу, так какъ всякое цѣлое число, возвышенное въ степень, даетъ цѣло число, а не дробь.

Предположимъ теперь, что $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ равняется нѣкоторо дроби, которая, по сокращеніи ея, пусть будетъ $^p/_q$. Тогда

$$\frac{a}{b}=\left(\frac{p}{q}\right)^m=\frac{p^m}{q^m}.$$

Это равенство возможно только тогда [1]), когда $a=p^m$ и $b=q$ но этого быть не можетъ согласно условію. Значитъ, нельз допустить, чтобы разсматриваемый корень равнялся какой нибудь дроби.

III. **Ариѳметическій корень данной степени изъ даннаго числ можетъ быть только одинъ.**

Напр., $\sqrt{\frac{4}{9}}$ равенъ $\frac{2}{3}$ и только одному этому числу; $\sqrt[3]{2}$ равенъ 3 и не можетъ равняться никакому иному числу.

Дѣйствительно, допустимъ, что $\sqrt[m]{N}$ можетъ равняться двум различнымъ ариѳметическимъ числамъ a и b; тогда было бы что $a^m=N$ и $b^m=N$ и, слѣд., $a^m=b^m$. Но это равенство не возможно, такъ какъ если, напр., $a>b$, то $aa>bb$, потому чт множимое и множитель въ первомъ изъ этихъ произведені больше соотвѣтственно множимаго и множителя во втором произведеніи, а съ увеличеніемъ множимаго и съ увеличеніем множителя произведеніе увеличивается [2]); по той же причин

---

[1]) Въ курсѣ ариѳметики доказывается, что **двѣ несократимыя дроби рав другъ другу только тогда, когда у нихъ равны числители и равны знаменател** (см., напр., А. Киселевъ, Систематическій курсъ ариѳметики, § 156, слѣдствія)

[2]) Это свойство относится также и къ произведенію ирраціональныхъ чи

$aaa > bbb$ и вообще $a^m > b^m$. Значитъ, если $a \neq b$, то a^m не можетъ равняться b^m и потому нельзя допустить, чтобы $\sqrt[m]{N}$ имѣлъ 2 различныя ариѳметическія значенія.

164. Алгебраическій корень. Мы будемъ называть выраженіе $\sqrt[m]{a}$ алгебраическимъ корнемъ m-ой степени изъ числа a въ томъ случаѣ, когда не требуется непремѣнно, чтобы подкоренное число a было положительнымъ и чтобы изъ всѣхъ возможныхъ значеній самаго корня бралось только одно положительное.

Извлеченіе алгебраическаго корня, какъ мы сейчасъ увидимъ, приводится къ нахожденію ариѳметическаго корня.

165. Нѣкоторыя свойства алгебраическаго корня. Укажемъ слѣдующія 4 свойства такого корня.

I. **Корень нечетной степени изъ положительнаго числа** (если онъ существуетъ) **есть положительное число, абсолютная величина котораго равна ариѳметическому корню той же степени изъ абсолютной величины подкоренного числа.**

Такъ, $\sqrt[3]{+8}$, если такой корень существуетъ, долженъ быть числомъ положительнымъ, такъ какъ отрицательное число, возвышенное въ нечетную степень, даетъ отрицательное число; абсолютная величина этого корня должна равняться ариѳметическому $\sqrt[3]{8}$, т.-е. числу 2, такъ какъ только при этой величинѣ послѣ возвышенія въ 3-ю степень получимъ число 8.

II. **Корень нечетной степени изъ отрицательнаго числа** (если онъ существуетъ) **есть отрицательное число, абсолютная величина котораго равна ариѳметическому корню той же степени изъ абсолютной величины подкоренного числа.**

Такъ, $\sqrt[3]{-8}$, если такой корень существуетъ, долженъ быть числомъ отрицательнымъ, такъ какъ всякое положительное число, возвышенное въ какую бы то ни было степень, даетъ

селъ; поэтому положительное значеніе $\sqrt[m]{N}$ можетъ быть только одно и въ томъ случаѣ, когда оно есть число ирраціональное.

положительное число, а не отрицательное; абсолютная величина этого корня должна равняться ариѳметическому $\sqrt[3]{8}$, т. е. числу 2, такъ какъ только при этой величинѣ послѣ возвышенія въ 3-ю степень получимъ число 8.

III. Корень четной степени изъ положительнаго числа (если онъ существуетъ) имѣетъ два значенія съ противоположными знаками; абсолютная величина каждаго изъ этихъ значеній равна ариѳметическому корню той же степени изъ абсолютной величины подкоренного числа.

Такъ, $\sqrt{+4}=+2$ и $\sqrt{+4}=-2$, потому что $(+2)^2=+4$ и $(-2)^2=+4$; никакому третьему числу $\sqrt{+4}$ равняться не можетъ; точно такъ же $\sqrt[4]{+81}=+3$ и $\sqrt[4]{+81}=-3$, потому что обѣ степени $(+3)^4$ и $(-3)^4$ равны $+81$, тогда какъ никакое третье число, возвышенное въ 4-ю степень, не можетъ дать $+81$.

Двойное значеніе корня обозначается обыкновенно постановкою двухъ знаковъ $\pm$ передъ абсолютной величиной корня; такъ, пишутъ: $\sqrt[4]{+81}=\pm3$, или проще, $\sqrt[4]{81}=\pm3$.

IV. Корень четной степени изъ отрицательнаго числа не можетъ равняться никакому—ни положительному, ни отрицательному - числу, потому что всякое число, какъ положительное, такъ и отрицательное, возвышенное въ четную степень, даетъ положительное число, а не отрицательное. Напр., $\sqrt{-9}$ не можетъ равняться ни $+3$, ни -3 и никакому иному числу.

Корень четной степени изъ отрицательнаго числа принято называть **мнимымъ числомъ**; въ противоположность такимъ числамъ, алгебраическія числа, которыя мы до сего времени разсматривали, называются **вещественными** или **дѣйствительными** числами.

163. Извлеченіе корня изъ произведенія, изъ степени и изъ дроби. Замѣтимъ, что въ теоремахъ этого параграфа предполагается, что всѣ подкоренныя числа взяты такими, что изъ нихъ корень извлекается; кромѣ того, корни разумѣются ариѳметическіе.

Теорема 1. Чтобы извлечь корень изъ произведенія, достаточно извлечь его изъ каждаго сомножителя отдѣльно.

Требуется доказать, что: $\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$. Для этого возвысимъ правую часть предполагаемаго равенства въ n-ую степень, для чего достаточно примѣнить теорему 1-ю § 155 («чтобы возвысить въ степень произведеніе, достаточно...»):

$$\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n\left(\sqrt[n]{c}\right)^n.$$

Но, согласно опредѣленію: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$, $\left(\sqrt[n]{b}\right)^n=b$ и $\left(\sqrt[n]{c}\right)^n=c$.

Значитъ: $$\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\right)^n=abc.$$

Если же n-ая степень произведенія $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$ равна abc, то это значитъ, что оно представляетъ собою n-ый корень изъ abc.

Примѣръ. $\sqrt[3]{512}=\sqrt[3]{8\cdot 64}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{64}=2\cdot 4=8.$

Теорема 2. Чтобы извлечь корень изъ степени, показатель которой дѣлится безъ остатка на показателя корня, достаточно раздѣлить показателя степени на показателя корня.

Такъ, $\sqrt[3]{a^6}=a^2$, потому что $(a^2)^3=a^6$. Докажемъ это въ общемъ видѣ.

Пусть въ выраженіи $\sqrt[n]{a^m}$ цѣлое число m дѣлится на цѣлое число n безъ остатка; тогда, назвавъ частное отъ дѣленія m на n буквою p, можемъ положить, что $m=np$. Требуется доказать, что:

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n]{a^{np}}=a^p.$$

Для этого возвысимъ число a^p въ n-ую степень, для чего достаточно примѣнить теорему 2-ю § 155 («чтобы возвысить степень въ другую степень, достаточно...»):

$$(a^p)^n=a^{pn}=a^m.$$

Если же n-ая степень числа a^p равна a^m, то это значитъ, что $a^p = \sqrt[n]{a^m}$.

Примѣръ. $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$.

Теорема 3. **Чтобы извлечь корень изъ дроби, достаточно извлечь его изъ числителя и знаменателя отдѣльно.**

Требуется доказать, что $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. Для этого возвысимъ правую часть этого предполагаемаго равенства въ n-ю степень, для чего достаточно примѣнить теорему 3-ю § 155 («чтобы возвысить въ степень дробь, достаточно...»):

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b}.$$

Значитъ, предполагаемое равенство вѣрно.

Примѣръ. $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$.

167. Извлеченіе корня изъ одночленовъ. Пусть требуется извлечь корень 3-й степени изъ одночлена $8a^9b^6c^{12}$. Примѣнимъ теорему 1-ю, а затѣмъ 2-ю:

$$\sqrt[3]{8a^9b^6c^{12}} = \sqrt[3]{8}\,\sqrt[3]{a^9}\,\sqrt[3]{b^6}\,\sqrt[3]{c^{12}} = 2a^3b^2c^4.$$

Правило. **Чтобы извлечь корень изъ одночлена, достаточно извлечь его изъ коэффиціента и раздѣлить показателей буквъ на показателя корня, если это дѣленіе возможно нацѣло.**

168. Нѣкоторыя преобразованія радикала. Доказанныя выше теоремы позволяютъ, между прочимъ, дѣлать слѣдующія преобразованія радикала:

1°. **Вынесеніе множителей за знакъ радикала.** Когда показатели всѣхъ или нѣкоторыхъ буквъ въ подкоренномъ выраженіи

больше показателя корня, но не дѣлятся на него безъ остатка, тогда можно разложить подкоренное выраженіе на множителей и извлечь корень изъ тѣхъ множителей, изъ которыхъ это возможно.

Примѣры. 1) $\sqrt{a^3}=\sqrt{a^2a}=\sqrt{a^2}\sqrt{a}=a\sqrt{a}$.

2) $\sqrt[3]{a^4}=\sqrt[3]{a^3a}=\sqrt[3]{a^3}.\sqrt[3]{a}=a\sqrt[3]{a}$.

3) $\sqrt[5]{x^{13}}=\sqrt[5]{x^{10}x^3}=\sqrt[5]{x^{10}}\sqrt[5]{x^3}=x^2\sqrt[5]{x^3}$.

4) $\sqrt{24a^4x^3}=\sqrt{4a^4x^2.6x}=2a^2x\sqrt{6x}$.

2°. **Подведеніе множителей подъ знакъ радикала.** Иногда бываетъ полезно, наоборотъ, подвести подъ знакъ радикала множителей, стоящихъ передъ нимъ; для этого надо возвысить ихъ въ степень, показатель которой равенъ показателю радикала, и написать множителями подъ радикаломъ.

Примѣры. 1) $a^2\sqrt{a}=\sqrt{(a^2)^2a}=\sqrt{a^4a}=\sqrt{a^5}$.

2) $3x^2y\sqrt[3]{xy}=\sqrt[3]{(3x^2y)^3xy}=\sqrt[3]{27x^7y^4}$.

3°. **Освобожденіе подкоренного выраженія отъ знаменателей.** Покажемъ, какъ можно это выполнить, на слѣдующихъ примѣрахъ:

1) $\sqrt{\frac{3}{2ax^3}}$. Сдѣлаемъ знаменателя квадратомъ. Для этого умножимъ его на 2, на a и на x, т.-е. на $2ax$. Чтобы дробь не измѣнила своей величины, умножимъ и числителя на $2ax$:

$$\sqrt{\frac{3}{2ax^3}}=\sqrt{\frac{6ax}{4a^2x^4}}=\frac{\sqrt{6ax}}{\sqrt{4a^2x^4}}=\frac{1}{2ax^2}\sqrt{6ax}.$$

2) $\sqrt[3]{2a+\frac{1}{4x}-\frac{5}{x^2}}$. Сначала приведемъ всѣ члены многочлена къ одинаковому знаменателю:

$$\sqrt[3]{2a+\frac{1}{4x}-\frac{5}{x^2}}=\sqrt[3]{\frac{8ax^2+x-20}{4x^2}}.$$

Теперь сдѣлаемъ знаменателя кубомъ, умноживъ оба члена дроби на $2x$:

$$\sqrt[3]{\frac{(8ax^8+x-20)2x}{8x^3}}=\frac{\sqrt[3]{16ax^9+2x^2-40x}}{\sqrt[3]{8x^3}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{16ax^9+2x^2-40x}}{2x}=\frac{1}{2x}\sqrt[3]{16ax^9+2x^2-40x}.$$

ГЛАВА IV.

Извлеченіе ариѳметическаго квадратнаго корня.

1. Извлеченіе квадратнаго корня изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, заключающагося въ данномъ цѣломъ числѣ.

169. Предварительное замѣчаніе. Если станемъ возвышать въ квадратъ числа натуральнаго ряда: 1, 2, 3, 4..., то получимъ безконечный рядъ возрастающихъ квадратовъ:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100...

Очевидно, что всякое цѣлое число, не находящееся въ этомъ ряду (напр., 40), не можетъ быть квадратомъ цѣлаго числа; въ такомъ случаѣ, какъ мы видѣли (§ 163, I), оно не можетъ быть и квадратомъ дроби. Значитъ, изъ такого числа нельзя извлечь квадратнаго корня. Но мы условимся, что если требуется извлечь квадратный корень изъ какого-нибудь цѣлаго числа, то это надо понимать въ томъ смыслѣ, что требуется извлечь квадратный корень или изъ самаго этого числа (если оно окажется квадратомъ), или же изъ наибольшаго квадрата цѣлаго числа, какой заключается въ данномъ числѣ.

170. Свойство числа десятковъ корня. Когда данное число болѣе 100, то квадратный корень изъ него болѣе (или равенъ) 10 и, слѣд., состоитъ изъ двухъ или болѣе цифръ. Сколько бы цифръ въ немъ ни было, мы условимся разсматривать его, какъ сумму только десятковъ и единицъ; если, напр.,

корень будетъ число 358, то мы будемъ его представлять такъ: 35 десятковъ $+$ 8 ед.

Пусть требуется извлечь кв. корень изъ какого-нибудь числа, большаго 100, напр., изъ числа 4082. Обозначимъ число десятковъ корня черезъ x (все равно, будетъ ли оно однозначное или многозначное), а число его единицъ черезъ y. Такъ какъ въ каждомъ десяткѣ содержится 10 ед., то искомый корень выразится $10x+y$. Квадратъ этой суммы долженъ быть наибольшимъ квадратомъ цѣлаго числа, заключающимся въ 4082; въ этомъ числѣ можетъ быть еще нѣкоторый избытокъ надъ наибольшимъ квадратомъ, который назовемъ **остаткомъ отъ извлеченія корня**; поэтому можемъ написать уравненіе:

$$4082=(10x+y)^2+\text{ост.}=100x^2+2xy10+y^2+\text{ост.}$$

Чтобы найти неизвѣстное x, опредѣлимъ, сколько сотенъ заключается въ лѣвой части уравненія и сколько ихъ въ правой части. Въ лѣвой части сотенъ заключается 40. Въ первомъ членѣ ($100x^2$) правой части сотенъ, очевидно, заключается x^2; въ суммѣ остальныхъ трехъ членовъ правой части сотни могутъ быть, но могутъ и не быть (что зависитъ отъ величины чиселъ x и y и остатка отъ извлеченія) [1]); значитъ, въ правой части уравненія всѣхъ сотенъ будетъ или x^2, или больше x^2. Такъ какъ число сотенъ въ лѣвой части уравненія должно равняться числу сотенъ въ правой, то

$$40 \geqslant x^2 \text{ и, слѣд.: } x^2 \leqslant 40.$$

Изъ этого слѣдуетъ, что x^2 есть такой квадратъ (цѣлаго числа), который содержится въ 40; но такихъ квадратовъ есть нѣсколько, а именно: 36, 25, 16 и т. д. Докажемъ, что за x^2 надо принять наибольшій изъ этихъ квадратовъ, т.-е. 36. Дѣйствительно, если бы мы взяли за x^2, положимъ, 25, то искомый корень содержалъ бы въ себѣ 5 десятковъ съ нѣсколькими единицами; но число, состоящее изъ 5 десятковъ съ нѣсколь-

---

[1]) Если, напр., допустимъ, что $x=6$, $y=8$, то уже одинъ членъ $2xy.10$ равный тогда числу 960, будетъ содержать въ себѣ 9 сотенъ; если же примемъ, что $x=1$, $y=2$, то тогда въ суммѣ двухъ членовъ $2xy.10+y^2$, равной 44, не будетъ содержаться ни одной сотни.

кими единицами (хотя бы этихъ единицъ было и 9), меньше 6 десятковъ ($59 < 60$); между тѣмъ квадратъ 6 десятковъ составляютъ только 36 сотенъ ($60^2 = 3600$), что меньше 4082, а такъ какъ мы ищемъ квадратный корень изъ **наибольшаго** квадрата цѣлаго числа, какой только заключается въ 4082, то не можемъ взять для корня 5 десятковъ съ единицами, когда и 6 десятковъ оказывается не много. Если же за x^2 надо взять число 36, то $x = \sqrt{36} = 6$. Такимъ образомъ:

число десятковъ искомаго корня равно квадратному корню изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, заключающагося въ числѣ сотенъ даннаго числа.

Когда данное число, какъ взятое нами, менѣе 10000, тогда число сотенъ въ немъ менѣе 100; въ этомъ случаѣ десятки корня прямо находятся по таблицѣ умноженія.

171. Свойство числа единицъ корня. Положимъ, что мы нашли десятки корня; тогда мы можемъ вычислить квадратъ десятковъ, т.-е. членъ $100x^2$; для нашего примѣра $x = 6$ и потому $100x^2$ составитъ 3600. Вычтемъ это число изъ 4082

$$\begin{array}{r} 4082 \\ -\underline{36} \\ 482 \end{array}$$

Для этого достаточно изъ 40 сотенъ вычесть 36 сотенъ и къ остатку снести цыфру 8 и 2. Получившееся число 482 назовемъ **первымъ остаткомъ**. Въ немъ заключаются: удвоенное произведеніе десятковъ корня на его единицы, квадратъ единицъ и остатокъ отъ извлеченія, если онъ есть, т.-е.

$$482 = 2xy10 + y^2 + \text{ост.}$$

Чтобы найти y, опредѣлимъ, сколько десятковъ заключается въ каждой части этого уравненія. Въ лѣвой части ихъ 48, а въ правой $2xy$ или больше (если въ суммѣ $y^2 +$ ост. окажутся десятки) [1]); поэтому:

$$48 \geqslant 2xy; \text{ слѣд., } 2xy \leqslant 48 \text{ и поэтому } y \leqslant \frac{48}{2x}.$$

Такимъ образомъ: **число единицъ корня или равно цѣлому частному отъ дѣленія числа десятковъ перваго остатка на удвоенное число десятковъ корня, или меньше этого частнаго.**

Пользуясь этимъ свойствомъ, мы можемъ найти единицы

---

[1]) Что, напр., будетъ при $y > 3$.

корня, если его десятки уже найдены. Такъ, въ нашемъ примѣрѣ, подставивъ на мѣсто x найденное прежде число 6, найдемъ, что $y \leqslant 4$. Отсюда слѣдуетъ, что y равенъ или 4, или 3, или 2, или 1, или 0. Здѣсь мы не можемъ утверждать заранѣе, что y равняется наибольшему изъ этихъ чиселъ; это иногда бываетъ, а иногда и нѣтъ. Чтобы узнать окончательно, какому изъ этихъ чиселъ равняется y, станемъ испытывать эти цифры, начиная съ бóльшей, т.-е. съ 4. Для этого вычислимъ сумму $2xy10+y^2$ и сравнимъ полученное число съ 482; если эта сумма дастъ число, бóльшее 482, то испытуемая цифра не годится; тогда подвергнемъ испытанію слѣдующую меньшую цифру.

Вычислить сумму $2xy10+y^2$ всего проще можно такъ:
$2xy10+y^2=(2x.10+y)y=(2.6.10+4)4=(120+4)4=124.4=496$, т.-е., **чтобы получить сумму удвоеннаго произведенія десятковъ на единицы и квадрата единицъ, слѣдуетъ къ удвоенному числу десятковъ (къ 12) приписать справа цифру единицъ (4) и на эту же цифру умножить получившееся число.**

Такъ какъ $496>482$, то цифра 4 не годится; надо испытать цыфру 3 подобнымъ же способомъ: $123.3=369$. Такъ какъ $369<482$, то цифра 3 годится. Искомый корень есть 63.

Вычтя 369 изъ 482, получимъ окончательный остатокъ отъ извлеченія корня: $482-369=113$, такъ что можемъ написать:

$$4082=63^2+113.$$

172. Извлеченіе квадратнаго корня, состоящаго изъ одной или изъ двухъ цифръ. Если данное число меньше 100, то квадратный корень изъ него выражается одною цифрою, и тогда его легко найти по таблицѣ умноженія.

Если же данное число, напр., 4082, болѣе 100, но менѣе 10000, то квадратный корень изъ него выражается 2 цифрами. Согласно сказанному въ предыдущихъ параграфахъ, цифры эти всего удобнѣе находить слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{l}{\sqrt{40'82}=63} \\ 36 & \\ \hline 123 & 48'2 \\ 3 & 36\,9 \\ \hline & 11\,3 \end{array}$$

Отдѣливъ въ подкоренномъ числѣ сотни, извлекаютъ квадр. корень изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, заключающагося въ числѣ ихъ; найденное число (6) пишутъ въ корнѣ на мѣстѣ десятковъ. Вычитаютъ квадратъ десятковъ корня

(36) изъ сотенъ даннаго числа и къ остатку отъ сотенъ сносятъ двѣ остальныя цифры. Налѣво отъ остатка проводятъ вертикальную черту, за которую пишутъ удвоенное число десятковъ корня (12). Отдѣливъ въ остаткѣ десятки, дѣлятъ число ихъ (48) на удвоенное число десятковъ корня (на 12), т.-е. на число, поставленное раньше налѣво отъ вертикальной черты. Цѣлое число, получившееся отъ этого дѣленія (число 4), подвергаютъ испытанію. Для этого приписываютъ его справа къ удвоенному числу десятковъ (за вертикальной чертой) и на него же умножаютъ получившееся отъ этого число (124 умножаютъ на 4). Если произведеніе окажется больше остатка (какъ въ нашемъ примѣрѣ), то испытуемая цифра не годится; тогда подвергаютъ испытанію слѣдующую меньшую цифру (123 умножаютъ на 3). Получивъ произведеніе, не бо́льшее остатка, подписываютъ его подъ остаткомъ и вычитаютъ, а испытуемую цифру пишутъ въ корнѣ на мѣстѣ единицъ.

173. Извлеченіе квадратнаго корня, состоящаго изъ трехъ или болѣе цифръ. Пусть требуется извлечь квадратный корень изъ какого-нибудь числа, бо́льшаго 10000, напр., изъ 35782. Квадратный корень изъ такого числа болѣе (или равенъ) 100 и потому состоитъ изъ трехъ или болѣе цифръ. Изъ сколькихъ бы цифръ онъ ни состоялъ, будемъ его разсматривать, какъ состоящій только изъ двухъ частей изъ десятковъ и изъ единицъ, и воспользуемся доказанными выше свойствами числа десятковъ корня и числа его единицъ. Число десятковъ корня, какъ мы видѣли (§ 171), равно квадратному корню изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, заключающагося въ числѣ сотенъ, т.-е. въ 357; значитъ, прежде всего надо извлечь квадратный корень изъ этого числа. Такъ какъ число 357 имѣетъ только три цифры, то этотъ корень найдется по предыдущему.

$\sqrt{3'57} = 18$
1
28 | 25'7
8 | 22 4
3 3

Значитъ, въ искомомъ корнѣ изъ 35782 заключается 18 десятковъ. Чтобы найти единицы его, надо, согласно доказанному прежде (§ 172), предварительно изъ 35782 вычесть квадратъ 18 десятковъ, для чего достаточно изъ 357 вычесть квадратъ 18 и къ остатку снести цифры 8 и 2. Остатокъ отъ вы-

читанія квадрата 18 изъ 357 у насъ уже есть: это 33. Значитъ, для полученія остатка отъ вычитанія квадрата 18 десятковъ изъ 35782, достаточно къ 33 приписать справа цифры 8 и 2. Дѣйствіемъ мы можемъ продолжать тамъ же, гдѣ находили $\sqrt{357}$:

$\sqrt{3'57'82} = 189$

```
  1
28|2'57
 8|224
369|338'2
  9|3321
     61.
```

Отдѣливъ десятки въ остаткѣ 3382, дѣлимъ, согласно доказанному, число ихъ (338) на удвоенное число десятковъ корня (на 36); цифру (9), полученную отъ дѣленія, подвергаемъ испытанію, для чего ее приписываемъ справа къ удвоенному числу десятковъ корня (къ 36) и на нее умножаемъ получившееся число (369 на 9).

Такъ какъ произведеніе оказалось меньше второго остатка, то цифра 9 годится; ее пишемъ въ корнѣ на мѣстѣ единицъ.

Вообще, чтобы извлечь квадратный корень изъ какого угодно числа, надо сначала извлечь квадр. корень изъ числа его сотенъ; если это число болѣе 100, то придется искать квадр. корень изъ числа сотенъ этихъ сотенъ, т.-е. изъ десятковъ тысячъ даннаго числа; если и это число болѣе 100, придется извлекать квадр. корень изъ числа сотенъ десятковъ тысячъ, т.-е. изъ милліоновъ даннаго числа и т. п.

174. Правило. Чтобы извлечь квадратный корень изъ даннаго числа, *разбиваютъ его,* отъ правой руки къ лѣвой, *на грани по 2 цифры въ каждой, кромѣ послѣдней,* въ которой можетъ быть и одна цифра.

Чтобы найти первую цифру корня, извлекаютъ квадратный корень изъ первой грани.

Чтобы найти вторую цифру, вычитаютъ изъ первой грани квадратъ первой цифры корня, къ остатку сносятъ вторую грань и число десятковъ получившагося числа дѣлятъ на удвоенную первую цифру корня; полученное цѣлое число подвергаютъ испытанію.

Слѣдующія цифры корня находятся по тому же пріему.

Если послѣ снесенія грани число десятковъ получившагося числа окажется меньше удвоенной найденной части корня, то въ корнѣ ставятъ 0 и сносятъ слѣдующую грань.

175. Примѣры извлеченія квадратнаго корня

```
√3'50'84'87'60 = 18717    √9'51'10'56 = 3084    √8'72'00'00 = 295
  1 . . . .                  9  . . .              4 . . .
 28|25'0. . . .            608|511'0. .        49|47'2  . .
  8|224.  . . .              8|486 4. .         9|44 1  . .
367|268'4. . .            6164|2465'6         585|310'0. .
  7|256 9. . .               4|2465 6           5|292 5. .
 3741|368'7  .                 0              5902|1750'0
    1|374 1  .                                    |1180 4
 37427|28465'9                                     569 6
     7|26198 9
        2267 0
```

176. Число цифръ въ корнѣ. Изъ процесса нахожденія цыфръ корня можно заключить, что **въ квадратном корнѣ столько цифръ, сколько въ подкоренномъ числѣ заключаетс граней по 2 цифры каждая, кромѣ одной, которая можетъ имѣть 2, и 1 цифру.**

2. Извлеченіе приближенныхъ квадратныхъ корней.

177. Предварительное замѣчаніе. Числа, изъ которыхъ квадратный корень можетъ быть выраженъ цѣлымъ ил дробнымъ числомъ, наз. **точными квадратами**. Есть очень мног чиселъ, какъ цѣлыхъ, такъ и дробныхъ, которыя не могут быть названы точными квадратами. Это, какъ слѣдуетъ из свойствъ ариеметическаго корня (§ 163), во-1-хъ, всѣ тѣ цѣлы числа, которыя не представляютъ собою квадратовъ цѣлых чиселъ; и, во-2-хъ, всѣ тѣ дроби, у которыхъ или числитель, ил знаменатель, или оба эти члена не представляютъ собою квадра товъ цѣлыхъ чиселъ.

Изъ такихъ чиселъ (ихъ называютъ иногда неточными квад ратами) можно извлекать только приближенные квадратные корни определяемые слѣдующимъ образомъ.

178. Опредѣленія. 1) **Приближеннымъ квадратнымъ корнем изъ даннаго (цѣлаго или дробнаго) числа съ точностью до 1 наз. каждое изъ двухъ такихъ цѣлыхъ чиселъ, которыя различаются одн**

отъ другого на 1 и между квадратами которыхъ заключается данное число; меньшее изъ этихъ чиселъ наз. приближеннымъ корнемъ съ недостаткомъ, а большее—приближеннымъ корнемъ съ избыткомъ.

Напр., приближенный квадратный корень изъ $56\frac{1}{2}$ съ точностью до 1 съ недостаткомъ есть 7, а съ избыткомъ 8, потому что эти цѣлыя числа различаются на 1 и между квадратами ихъ заключается $56\frac{1}{2}$, такъ какъ $7^2=49$, а $8^2=64$ и, слѣдов.:

$$7^2 < 56\frac{1}{2} < 8^2.$$

2) Приближеннымъ квадратнымъ корнемъ изъ даннаго (цѣлаго или дробнаго) числа съ точностью до $1/n$ наз. каждая изъ двухъ такихъ дробей съ знаменателемъ n, которыя различаются одна отъ другой на $1/n$ и между квадратами которыхъ заключается данное число; меньшая изъ этихъ дробей наз. приближеннымъ корнемъ съ недостаткомъ, а большая—приближеннымъ корнемъ съ избыткомъ.

Напр., приближенный квадратный корень изъ 27,5 съ точностью до $1/_{10}$ съ недостаткомъ есть 5,2, а съ избыткомъ 5,3, потому что эти дроби, имѣя знаменателя 10, различаются на $1/_{10}$, и между квадратами ихъ заключается 27,5, такъ какъ $5{,}2^2=27{,}04$ и $5{,}3^2=28{,}09$ и, слѣд.:

$$5{,}2^2 < 27{,}5 < 5{,}3^2.$$

179. Правило I. **Чтобы извлечь изъ даннаго числа приближенный квадратный корень съ недостаткомъ съ точностью до 1, извлекаютъ квадратный корень изъ наибольшаго цѣлаго квадрата, заключающагося въ цѣлой части даннаго числа.**

Пусть, напр., требуется найти приближенный квадратны корень съ точностью до 1 изъ $150\frac{3}{7}$. Для этого извлечемъ квадр. корень изъ наиб. цѣлаго квадрата, заключающагос въ 150; это будетъ 12. Значитъ, $12^2 < 150 < 13^2$. Разъяснимъ, что это двойное неравенство не нарушится, если къ числ 150 мы добавимъ правильную дробь $3/_7$. Дѣйствительно, есл $12^2 < 150$, то и подавно $12^2 < 150\frac{3}{7}$. Съ другой стороны, так какъ 150 и 13^2 числа цѣлыя и $150 < 13^2$, то, значитъ, 150 менѣе 13^2 на нѣкоторое цѣлое число, по меньшей мѣрѣ, на одну цѣ

лую единицу, слѣд., если прибавимъ къ 150 дробь $^6/_7$, которая меньше единицы, то число $150^6/_7$ останется все-таки меньшимъ, чѣмъ 13^2. Итакъ, $12^2 < 150^6/_7 < 13^2$. Отсюда слѣдуетъ, что каждое изъ чиселъ 12 и 13 есть приближенный квадратный корень изъ $150^6/_7$ съ точностью до 1, при чемъ 12 есть приближенный корень съ недостаткомъ, а 13 — приближенный корень съ избыткомъ.

Примѣры.

1) $\sqrt{5} = 2$ или 3;   2) $\sqrt{5,375} = 2$ или 3;

3) $\sqrt{\frac{487}{13}} = \sqrt{37\frac{6}{13}} = 6$ или 7;   4) $\sqrt{\frac{5}{6}} = 0$ или 1.

Правило 2. Чтобы извлечь изъ даннаго числа приближенный квадратный корень съ недостаткомъ съ точностью до $^1/_n$, умножаютъ данное число на n^2, изъ полученнаго произведенія извлекаютъ квадратный корень съ недостаткомъ съ точностью до 1 и дѣлятъ его на n.

Пусть, напр., требуется найти приближенный квадратный корень изъ 5 до $^1/_{10}$. Это значитъ, что требуется найти двѣ такія дроби съ знаменателемъ 10, которыя разнятся другъ отъ друга на $^1/_{10}$ и между квадратами которыхъ заключается 5. Пусть искомыя дроби будутъ $^x/_{10}$ и $^{x+1}/_{10}$. Тогда согласно опредѣленію:

$$\left(\frac{x}{10}\right)^2 < 5 < \left(\frac{x+1}{10}\right)^2; \text{ или } \frac{x^2}{10^2} < 5 < \frac{(x+1)^2}{10^2}.$$

Умноживъ всѣ члены этого двойного неравенства на 10^2, мы не измѣнимъ его смысла, т.-е. меньшее останется меньшимъ; поэтому:

$$x^2 < 5\cdot 10^2 < (x+1)^2.$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что произведеніе $5\cdot 10^2$ заключается между квадратами двухъ цѣлыхъ чиселъ: x и $x+1$, отличающихся другъ отъ друга на 1. Значитъ x и $x+1$ суть приближенные квадратные корни съ точностью до 1 изъ произведенія $5\cdot 10^2$. Найдя эти корни (22 и 23) такъ, какъ было

показано раньше, получимъ числителей дробей $^{\alpha}/_{10}$ и $^{\alpha+1}/_{10}$, а раздѣливъ ихъ на 10, найдемъ и самыя дроби (2,2 и 2,3). Дробь $^{\alpha}/_{10}$ будетъ приближеннымъ корнемъ съ недостаткомъ, а дробь $^{\alpha+1}/_{10}$ — съ избыткомъ.

Примѣры.

1) Найти $\sqrt{72}$ съ точностью до $^1/_7$;

$$72.7^2 = 72.49 = 3528;$$

$$\sqrt{3528} = 59 \text{ (до 1)}; \ \sqrt{72} = \frac{59}{7}\left(\text{до } \frac{1}{7}\right).$$

2) Найти $\sqrt{2}$ до тысячныхъ долей:

$$2.1000^2 = 2000000; \ \sqrt{2000000} = 1414 \text{ (до 1)}; \ \sqrt{2} = 1{,}414 \text{ (до } ^1/_{1000})$$

3) Найти $\sqrt{^3/_7}$ съ приближеніемъ до $^1/_{1000}$:

$$\frac{3}{7}.1000^2 = \frac{3000000}{7} = 428571\frac{3}{7}; \ \sqrt{428571} = 654; \ \sqrt{\frac{3}{7}} =$$

$$= 0{,}654 \text{ (до } ^1/_{1000}).$$

4) Найти $\sqrt{0{,}3}$ до $^1/_{100}$:

$$0{,}3.100^2 = 3000; \ \sqrt{3000} = 54; \ \sqrt{0{,}3} = 0{,}54 \text{ (до } ^1/_{100}).$$

5) Найти $\sqrt{0{,}38472}$ до $^1/_{10}$:

$$0{,}38472.10^2 = 38{,}472; \ \sqrt{38} = 6; \ \sqrt{0{,}38472} = 0{,}6 \text{ (до } ^1/_{10}).$$

6) Найти $\sqrt{465}$ съ какимъ-нибудь десятичнымъ приближеніемъ:

$$\sqrt{4'65} = 21{,}56$$

	4
41	65
1	41
425	240'0
5	2125
4306	27500
6	25836
	1664

Сначала извлекаемъ корень съ точностью до 1; получаемъ 21. Чтобы найти цифру десятыхъ (иначе сказать, чтобы найти приближенный корень до $^1/_{10}$), надо было бы умножить 465 на 10^2 т.-е. приписать къ 465 два нуля. Очевидно, это все равно, что приписать къ **остатку** два нуля. Найдя цифру десятыхъ, можемъ снова приписать къ остатку 2 нуля и искать цифру сотыхъ, и т. д.

Извлеченіе квадратныхъ корней изъ дробей.

120. Точный квадратный корень изъ несократимой дроби можно извлечь лишь въ томъ случаѣ, когда оба члена дроби суть точные квадраты (§ 103, II). Въ этомъ случаѣ достаточно извлечь корень изъ числителя и знаменателя отдѣльно; напримѣръ:

$$\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{3}{4}.$$

Приближенные квадратные корни изъ дробей находятся обыкновенно такъ, какъ указано въ предыдущемъ параграфѣ (см. примѣры 3, 4 и 5). Впрочемъ, можно поступать и иначе. Объяснимъ это на слѣдующихъ 2-хъ примѣрахъ:

1) Найти приближенный $\sqrt{\frac{5}{24}}$.

Сдѣлаемъ знаменателя точнымъ квадратомъ. Для этого достаточно было бы умножить оба члена дроби на знаменателя; но въ этомъ примѣрѣ можно поступить проще. Разложимъ знаменателя на простыхъ множителей: $24 = 2.2.2.3$. Изъ этого разложенія видно, что если 24 умножить на 2 и еще на 3, то тогда въ произведеніи каждый простой множитель будетъ повторяться четное число разъ, и, слѣдов., знаменатель сдѣлается квадратомъ; поэтому

$$\sqrt{\frac{5}{24}}=\sqrt{\frac{5}{2.2.2.3}}=\sqrt{\frac{5.2.3}{2^4.3^2}}=\frac{\sqrt{30}}{2^2.3}=\frac{\sqrt{30}}{12}.$$

Остается вычислить $\sqrt{30}$ съ какою-нибудь точностью и результатъ раздѣлить на 12. При этомъ надо имѣть въ виду, что отъ дѣленія на 12 уменьшится и дробь $1/n$, показывающая степень точности. Такъ, если найдемъ $\sqrt{30}$ съ точностью до $1/10$, то получимъ 5,4 (съ нед.) и 5,5 (съ избыткомъ). Раздѣливъ эти числа на 12, найдемъ $54/120$ (съ нед.) и $55/120$ (съ избыткомъ). Это будутъ приближенные квадр. корни изъ дроби $5/24$ съ точностью до $1/120$.

2) Найти приближенный $\sqrt{0,378}$.

$$\sqrt{0,378}=\sqrt{\frac{378}{1000}}=\sqrt{\frac{3780}{10000}}=\frac{\sqrt{3780}}{100}=\frac{61}{100}\text{ или }\frac{62}{100}\left(\text{до }\frac{1}{100}\right).$$

4. Извлеченіе квадратнаго корня изъ многочлена.

181. Объясненіе. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ квадратный корень изъ многочлена можетъ быть выраженъ въ видѣ многочлена (въ видѣ одночлена онъ не можетъ быть выраженъ, такъ какъ одночленъ въ квадратѣ даетъ одночленъ, а не многочленъ). Покажемъ это на слѣдующемъ примѣрѣ:

$$\sqrt{16a^4b^2-24a^3b^3+13a^2b^4-3ab^5+{}^1/_4b^6}.$$

Мы расположили данный многочленъ по убывающимъ степенямъ буквы a, такъ что высшій членъ въ немъ есть первый, а низшій—послѣдній.

Предположимъ, что существуетъ многочленъ, квадратъ котораго равенъ данному многочлену. Пусть этотъ многочленъ тоже расположенъ по убывающимъ степенямъ буквы a, такъ что высшій членъ въ немъ первый.

Мы видѣли (§ 158), что квадратъ многочлена=квадрату 1-го члена + удвоенное произведеніе 1-го чл. на 2-й + квадратъ 2-го члена + удвоенное произведеніе суммы первыхъ двухъ членовъ на 3-й + квадратъ 3-го члена, и т. д. Если возвышаемый многочленъ расположенъ по убывающимъ степенямъ главной буквы, то очевидно, что высшій членъ въ квадратѣ этого многочлена есть квадратъ перваго его члена. Въ подкоренномъ многочленѣ высшій членъ есть $16a^4b^2$; значитъ, это и есть квадратъ 1-го члена искомаго многочлена; поэтому 1-й членъ корня $=\sqrt{16a^4b^2}=$ $=\pm 4a^2b$. Такимъ образомъ:

чтобы найти первый членъ корня, достаточно извлечь квадратный корень изъ перваго члена подкоренного многочлена (предварительно расположеннаго).

Изъ найденныхъ двухъ значеній перваго члена возьмемъ пока одно: $+4a^2b$, а впослѣдствіи примемъ во вниманіе и другое.

$$\sqrt{16a^4b^2-24a^3b^3+13a^2b^4-3ab^5+\tfrac{1}{4}b^6}=4a^2b-3ab^2+\tfrac{1}{2}b^3.$$

$$\begin{array}{r|l}
 & -16a^4b^2 \\
\hline
8a^2b-3ab^2 & \text{»}\ -24a^3b^3+13a^2b^4 \quad \text{первый остатокъ} \\
-3ab^2 & \text{»}\ +24a^3b^3-\ 9a^2b^4 \\
\hline
8a^2b-6ab^2+\tfrac{1}{2}b^3 & \text{»}\ +4a^2b^4-3ab^5+\tfrac{1}{4}b^6 \quad \text{второй остатокъ} \\
\tfrac{1}{2}b^3 & \text{»}\ -4a^2b^4+3ab^5-\tfrac{1}{4}b^6 \\
\hline
 & 0.
\end{array}$$

Найдя первый членъ корня ($4a^2b$), возвысимъ его въ квадратъ и вычтемъ изъ подкоренного многочлена. Въ остаткѣ (первомъ) должны получиться всѣ члены многочлена, кромѣ перваго. Мы написали только 2 члена остатка, потому что остальные пока не нужны. Въ этомъ первомъ остаткѣ должны содержаться: удвоенное произведеніе 1-го члена на 2-й + квадратъ второго члена + удвоенное произведеніе суммы первыхъ двухъ членовъ на 3-й + квадратъ 3-го, и т. д. Изъ всѣхъ этихъ членовъ высшимъ будетъ удвоенное произведеніе 1-го члена на 2-й, а въ остаткѣ высшій членъ есть $-24a^3b^3$; слѣд., $-24a^3b^3$ и есть удвоенное произведеніе 1-го члена на 2-й. А потому:

чтобы найти 2-й членъ корня, достаточно раздѣлить первый членъ перваго остатка на удвоенный первый членъ корня.

Для этого налѣво отъ остатка (или направо отъ него) проводимъ вертикальную черту, за нею пишемъ удвоенный первый членъ корня ($8a^2b$). Раздѣливъ -24^3b^3 на $8a^2b$, получаемъ одночленъ $-3ab^2$, который и записываемъ въ корнѣ на мѣстѣ второго члена, и вмѣстѣ съ тѣмъ приписываемъ его за вертикальной чертой къ удвоенному первому члену (получаемъ за чертой $8a^2b-3ab^2$). Это дѣлается для того, чтобы, умноживъ $8a^2b-3ab^2$ на $-3ab^2$, заразъ получить: удвоенное произведеніе 1-го члена на 2-й и квадратъ 2-го члена. Умноживъ на самомъ дѣлѣ $8a^2b-3ab^2$ на $-3ab^2$, пишемъ произведеніе подъ остаткомъ и изъ него вычитаемъ (для чего перемѣняемъ знаки у вычитаемаго многочлена на противоположные); получаемъ второй остатокъ $+4a^2b^4-3ab^5+{}^1/_4b^6$.

Во второмъ остаткѣ должны содержаться: удвоенное произведеніе суммы первыхъ двухъ членовъ корня на 3-й чл. + квадратъ 3-го члена, и т. д.; другими словами: удвоенное произведеніе 1-го чл. на 3-й + удвоенное произведеніе 2-го члена на 3-й + квадратъ 3-го чл., и т. д. Изо всѣхъ этихъ членовъ высшій есть удвоенное произведеніе 1-го члена на 3-й; а въ остаткѣ высшій членъ есть $+4a^2b^4$. Значитъ, $4a^2b^4$ и есть удвоенное произведеніе 1-го члена корня на 3-й его членъ. Поэтому:

чтобы найти 3-й членъ корня, достаточно раздѣлить первый членъ второго остатка на удвоенный 1-й членъ корня.

Пишемъ $8a^2b$ за вертикальною чертою и дѣлимъ на это выраженіе $4a^2b^1$; получаемъ $+\frac{1}{2}b^3$; пишемъ этотъ результатъ въ корнѣ на мѣстѣ 3-го члена. Теперь намъ нужно составить удвоенное произведеніе 1-го члена на 3-й + удвоенное произведеніе 2-го члена на 3-й + квадратъ 3-го члена и полученную сумму вычесть изъ второго остатка. Чтобы удобнѣе найти эту сумму, къ удвоенному 1-му члену приписываемъ (за вертикальной чертой) удвоенный 2-й членъ и еще 3-й членъ корня (получаемъ $8a^2b - 6ab^2 + \frac{1}{2}b^3$) и образовавшійся отъ этого многочленъ умножаемъ на 3-й членъ, т.-е. на $\frac{1}{2}b^3$; полученное произведеніе подписываемъ подъ остатокъ и изъ него вычитаемъ (для чего перемѣняемъ знаки у вычитаемаго многочлена).

Въ нашемъ примѣрѣ 3-й остатокъ оказался 0; если бы получился остатокъ, не равный 0, то мы продолжали бы дѣйствіе далѣе, разсуждая такъ, какъ и раньше.

Для перваго члена искомаго корня мы взяли лишь одно значеніе $\sqrt{16a^4b^2}$, именно $+4a^2b$; но мы могли бы также взять и $-4a^2b$; въ этомъ случаѣ остальные члены корня тоже перемѣнили бы знаки на противоположные, потому что для полученія ихъ пришлось бы дѣлить первые члены остатковъ не на $8a^2b$, а на $-8a^2b$. Значитъ, квадратный корень изъ многочлена имѣетъ два значенія; въ нашемъ примѣрѣ одно $= 4a^2b - 3ab^2 + \frac{1}{2}b^3$, другое $= -4a^2b + 3ab^2 - \frac{1}{2}b^3$, оба эти значенія можно выразить такъ:

$$\pm(4a^2b - 3ab^2 + \frac{1}{2}b^3).$$

Мы могли бы подкоренной многочленъ расположить по возрастающимъ степенямъ главной буквы; члены корня нашлись бы тогда совершенно такъ же, какъ сейчасъ было объяснено; только въ объясненіи слово «высшій» должно замѣнить словомъ «низшій».

182. Правило. Чтобы извлечь квадратный корень изъ многочлена, предварительно располагаютъ его по убывающимъ или по возрастающимъ степенямъ одной и той же буквы.

Извлекаютъ квадратный корень изъ 1-го члена многочлена; полученный результатъ берутъ за 1-й членъ корня.

Возвысивъ этотъ членъ въ квадратъ, вычитаютъ его изъ даннаго многочлена.

Дѣлятъ 1-й членъ перваго остатка на удвоенный первый членъ корня; полученное частное берутъ за 2-й членъ корня.

Приписавъ этотъ членъ къ удвоенному 1-му члену корня, умножаютъ полученный двучленъ на 2-й членъ корня и произведеніе вычитаютъ изъ остатка.

Дѣлятъ 1-й членъ 2-го остатка на удвоенный 1-й членъ корня; полученное частное принимаютъ за 3-й членъ корня.

Приписавъ этотъ членъ къ суммѣ удвоеннаго 1-го члена и удвоеннаго 2-го члена, умножаютъ полученный трехчленъ на 3-й членъ корня и произведеніе вычитаютъ изъ 2-го остатка.

Продолжаютъ дѣйствіе такъ же и далѣе.

183. Признаки невозможности извлеченія.

1) Если данный многочленъ есть двучленъ, то корень квадратный изъ него не можетъ быть выраженъ многочленомъ, такъ какъ всякій многочленъ въ квадратѣ даетъ по меньшей мѣрѣ 3 члена, а не 2.

2) Если высшій или низшій члены многочлена не представляютъ собою точныхъ квадратовъ, то корень квадратный изъ многочлена не можетъ быть выраженъ многочленомъ.

Это прямо слѣдуетъ изъ правила нахожденія высшаго и низшаго членовъ корня.

3) Если высшій и низшій члены многочлена — точные квадраты, то возможность или невозможность извлеченія корня обнаружится посредствомъ самаго дѣйствія; при этомъ если многочленъ расположенъ по убывающимъ степенямъ главной буквы, то продолжаютъ дѣйствіе до тѣхъ поръ, пока въ остаткѣ не получится 0, или пока не получится остатокъ, у котораго первый членъ не дѣлится на удвоенный первый членъ корня; въ послѣднемъ случаѣ извлеченіе невозможно. Если же многочленъ расположенъ по возрастающимъ степенямъ главной буквы, то, вычисливъ предварительно послѣдній членъ корня (который равенъ корню квадратному изъ послѣдняго члена многочлена), продолжаютъ дѣйствіе до тѣхъ поръ, пока въ корнѣ не получится членъ, у котораго показатель главной буквы равенъ показателю этой буквы въ вычисленномъ послѣднемъ членѣ корня, или болѣе его; если при этомъ есть остатокъ, то извлеченіе невозможно.

184. Замѣчаніе. Когда изъ даннаго многочлена нельзя извлечь точнаго квадратнаго корня, все-таки иногда бываетъ полезно начать извлеченіе съ тѣмъ, чтобы, прекративъ его на какомъ-нибудь членѣ корня, представить данный многочленъ въ видѣ суммы квадрата съ остаткомъ отъ извлеченія. Напримѣръ:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{x^4-4x^3+3} & = x^2-2x \\ -x^4 & \\ 2x^2-2x & \text{»} -4x^3+3 \\ -2x & \text{»} +4x^3-4x^2 \\ & \quad -4x^2+3. \end{array}$$

Положимъ, что мы прекратили извлеченіе на второмъ членѣ корня. Получившійся при этомъ остатокъ произошелъ отъ вычитанія изъ подкоренного многочлена всѣхъ членовъ, которые получаются отъ возвышенія въ квадратъ найденнаго двучлена x^2-2x; значитъ:

$$(x^4-4x^3+3)-(x^2-2x)^2=-4x^2+3;$$

слѣд.: $x^4-4x^3+3=(x^2-2x)^2+(-4x^2+3)=(x^2-2x)^2-$ $-4x^2+3$.

ГЛАВА V.

Извлеченіе ариѳметическаго кубичнаго корня.

1. Извлеченіе кубичнаго корня изъ наибольшаго цѣлаго куба, заключающагося въ данномъ числѣ.

185. Предварительное замѣчаніе. Если возвысимъ въ кубъ числа натуральнаго ряда: 1, 2, 3, 4, 5..., то получимъ безконечный рядъ кубовъ:

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000...

(изъ нихъ первые 10 надо заучить наизусть).

Очевидно, что всякое цѣлое число, не находящееся въ этомъ ряду (напр., 500), не можетъ быть кубомъ цѣлаго числа; въ такомъ случаѣ оно не можетъ быть и кубомъ дроби (§ 163). Значитъ, изъ такого числа нельзя извлечь кубичнаго корня. Но мы условимся, что если требуется извлечь

кубичный корень изъ какого-нибудь цѣлаго числа, то это надо понима въ томъ смыслѣ, что требуется извлечь кубичный корень или изъ сама числа (если оно окажется кубомъ цѣлаго числа), или же изъ **наибольшаг** куба цѣлаго числа, какой заключается въ данномъ числѣ.

186. Свойство числа десятковъ корня. Если данно число болѣе 1000, то кубичный корень изъ него болѣе (или равенъ) 10 и слѣдов., состоитъ изъ двухъ или болѣе цифръ. Изъ сколькихъ бы цифр онъ ни состоялъ, условимся разсматривать его какъ сумму только десят ковъ и единицъ. Пусть требуется извлечь куб. корень изъ какого-нибуд числа, большаго 1000, напр., изъ 571810. Предположимъ, что въ искомом корнѣ десятковъ будетъ x (число это можетъ быть однозначное или много значное, все равно), а единицъ y; тогда искомый корень выразится $10x+y$ слѣдов.:

$$571810=(10x+y)^3+\text{ост.}=1000x^3+3.\ 100x^2y+3.\ 10xy^2+y^3+\text{ост.}$$

Чтобы найти число x, возьмемъ изъ обѣихъ частей этого равенств однѣ только тысячи. Въ лѣвой части этого равенства находится 571 тысяча а въ правой тысячъ или x^3, или болѣе (если тысячи окажутся въ сумм 4-хъ послѣднихъ членовъ); поэтому

$$571\geqslant x^3 \text{ и, слѣд.: } x^3\leqslant 571.$$

Изъ этой формулы слѣдуетъ, что x^3 есть одинъ изъ цѣлыхъ кубовъ заключающихся въ 571. Докажемъ, что за x^3 надо взять **наибольшій** из этихъ кубовъ, т.-е. 512. Въ самомъ дѣлѣ, если бы мы взяли за x^3 не 512 а, положимъ, 343, то x равнялся бы 7, а потому искомый корень былъ б 7 десятковъ съ единицами. Но 7 десятковъ съ единицами (хотя бы еди ницъ было и 9) меньше 8 десятковъ, а 8 десятковъ въ кубѣ составляютъ только 512 тысячъ, что меньше даннаго числа; поэтому мы не можем взять 7 десятковъ съ единицами, когда и 8 десятковъ оказывается не мног Если же $x^3=512$, то $x=\sqrt[3]{512}=8$.

Отсюда слѣдуетъ: **число десятковъ искомаго корня (будетъ ли это числ однозначнымъ или многозначнымъ) равно кубичному корню изъ наибольшаго цѣлаг куба, заключающагося въ числѣ тысячъ даннаго числа.**

Когда данное число, какъ взятое нами, меньше 1000000, тогда числ тысячъ въ немъ меньше 1000; въ этомъ случаѣ десятки корня легко нахо дятся по таблицѣ кубовъ первыхъ 9 чиселъ.

187. Свойство числа единицъ корня. Найдя десятк корня, вычислимъ членъ $1000x^3$ и вычтемъ изъ даннаго числа; тогда полу чимъ **первый остатокъ**. Чтобы найти его, достаточно вычесть x^3, т.- 512, изъ 571 и къ остатку снести остальныя три цифры:

$$\begin{array}{l} 571810 \\ -512 \\ \hline 59810=3\ .\ 100x^2y+3.\ .\ 10xy^2+y^3+\text{ост.} \end{array}$$

Чтобы найти y, возьмемъ въ обѣихъ частяхъ этого равенства только однѣ сотни. Въ лѣвой части сотенъ 598, а въ правой $3x^2y$ или больше, если сотни окажутся въ суммѣ послѣднихъ трехъ членовъ; поэтому:

$$598 \geqslant 3x^2y;\ \text{и, слѣд.,}\ 3x^2y \leqslant 598;\ \text{поэтому}\ y \leqslant \frac{598}{3x^2},$$

т.-е. число единицъ корня или равно цѣлому частному отъ дѣленія числа сотенъ перваго остатка на утроенный квадратъ числа десятковъ корня, или меньше этого частнаго.

Подставимъ вмѣсто x найденное для него число 8, получимъ:

$$y \leqslant \frac{598}{3.8^2} = \frac{598}{192} = 3\frac{22}{192} = 3\frac{11}{96}.$$

Отсюда видно, что y есть или 3, или 2, или 1, или 0. Чтобы опредѣлить, какое изъ этихъ чиселъ надо взять за y, испытаемъ сначала бóльшую цифру, т.-е. 3. Для этого вычислимъ сумму членовъ: $3.100x^2y + 3.10xy^2 + y^3$ при $x = 8$ и $y = 3$; если получится число, не большее перваго остатка 59810, то испытуемая цифра годится; въ противномъ случаѣ надо испытать слѣдующую меньшую цифру:

$$\begin{aligned} 3x^2y.100 &= 3.64.3.100 = 57600 \\ 3xy^2.\ 10 &= 3.8.9.10 \quad = \ \ 2160 \\ y^3 &= 3^3 \qquad\quad\ \ = \quad\ 27 \\ \hline & \qquad\qquad\qquad\quad\ 59787 \end{aligned}$$

Испытуемая цифра годится. Искомый корень 83. Чтобы найти окончательный остатокъ отъ извлеченія, надо изъ 59810 вычесть 59787; послѣ вычитанія получимъ 23, вслѣдствіе чего можно написать:

$$571810 = 83^3 + 23.$$

Вычисляя члены $3x^2y.100$ и $3xy^2.10$, мы можемъ не писать на концѣ нулей, а только, при подписываніи слагаемыхъ другъ подъ другомъ, имѣть въ виду, что произведеніе $3x^2y$ означаетъ сотни, а $3xy^2$—десятки.

188. Извлеченіе кубичнаго корня, состоящаго изъ одной или двухъ цифръ. Если данное число меньше 1000, то куб. корень изъ него выражается одною цифрою, и тогда онъ находится по таблицѣ кубовъ первыхъ 9 чиселъ.

Если же данное число, напр., 581810, болѣе 1000, но менѣе 1000000, то куб. корень изъ него выражается 2 цифрами. Согласно сказанному выше, цифры эти всего удобнѣе находить такимъ образомъ: отдѣливъ

	$\sqrt[3]{571'810} = 83$
	512
$3.8^2 = 192$	598'10
$3.8^2.3 =$	576
$3.8.3^2 =$	216
$3^3 =$	27
	59787
	23

въ данномъ числѣ тысячи (571), извлекаютъ куб. корень изъ наибольшаго цѣлаго куба, заключающагося въ числѣ ихъ. Полученное число пишутъ въ корнѣ; это будутъ десятки искомаго корня. Возвысивъ найденное число въ кубъ, вычитаютъ результатъ изъ числа тысячъ даннаго числа къ остатку (59) сносятъ остальныя три цифры подкореннаго числа. Отдѣляютъ въ этомъ остаткѣ сотни; налѣво отъ него проводятъ вертикальную

черту, за которой пишутъ утроенный квадратъ числа десятковъ корня. На это число дѣлятъ число сотенъ остатка. Полученную цифру (3) подвергаютъ испытанію. Для этого вычисляютъ отдѣльно три слагаемыя: утроенное произведеніе квадрата десятковъ на единицы, утроенное произведеніе десятковъ на квадратъ единицъ и кубъ единицъ. Подписавъ эти слагаемыя другъ подъ другомъ (при чемъ второе и третье сдвигаютъ на одно мѣсто вправо), находятъ ихъ сумму (60787). Если эта сумма оказывается не болѣе остатка, то ее вычитаютъ изъ него; въ противномъ случаѣ подвергаютъ испытанію слѣдующую меньшую цифру.

180. Извлеченіе кубичнаго корня, состоящаго изъ трехъ или болѣе цифръ. Пусть требуется извлечь куб. корень изъ числа, бо́льшаго милліона, напр., изъ 53820756. Куб. корень изъ такого числа болѣе (или равенъ) 100 и потому состоитъ изъ 3 или болѣе цифръ. Мы однако можемъ его разсматривать, какъ состоящій только изъ десятковъ и единицъ. Чтобы найти десятки корня, надо, по доказанному, извлечь куб. корень изъ наибольшаго цѣлаго куба, заключающагося въ числѣ тысячъ даннаго числа, т.-е. въ 53820. Такъ какъ это число менѣе 1000000, то корень изъ него найдемъ описаннымъ ранѣе пріемомъ:

$$\sqrt[3]{53'820'765} = 377$$

	27
$3.3^2 = 27$	268'20
$3.3^2.7 =$	189
$3.3.7^2 =$	441
$7^3 =$	343
	23653
$3.37^2 = 4107$	31677'65
$3.37^2.7 =$	28749
$3.37.7^2 =$	5439
$7^3 =$	343
	2929633
	238123

Цифры 9 и 8, по испытаніи ихъ, оказываются велики. Такимъ образомъ, въ искомомъ корнѣ оказывается 37 десятковъ.

Чтобы найти единицы корня, надо, по доказанному прежде, найти предварительно первый остатокъ, т.-е. изъ даннаго числа вычесть кубъ десятковъ, т.-е. $37^3 . 1000$. Для этого достаточно изъ 53820 вычесть 37^3 и къ остатку приписать послѣднія три цифры даннаго числа, т.-е. 756. Остатокъ отъ вычитанія 37^3 изъ 53820 у насъ уже есть, именно 3167. Припишемъ къ этому числу цифры 756; получимъ остатокъ 3167756 отъ вычитанія $37^3 . 1000$ изъ всего даннаго числа. Отдѣлимъ въ этомъ остаткѣ сотни и раздѣлимъ число ихъ на 3.37^2; тогда получимъ, по указанному, число или равное числу единицъ корня, или бо́льшое его. Испытаніемъ убѣдимся, какая цифра будетъ надлежащая. Дѣйствіе можно продолжать тамъ же, гдѣ мы находили десятки корня.

Вообще, чтобы извлечь куб. корень изъ какого угодно большого числа, надо сначала извлечь куб. корень изъ числа его тысячъ. Если это число болѣе 1000, то придется извлекать куб. корень изъ числа тысячъ этихъ тысячъ, т.-е. изъ милліоновъ даннаго числа; если и это число болѣе 1000, то придется извлекать корень изъ числа тысячъ милліоновъ, т.-е. изъ билліоновъ даннаго числа и т. д.

190. Правило. Чтобы извлечь куб. корень изъ даннаго числа, разбиваютъ его, отъ правой руки къ лѣвой, на грани, по три цифры въ каждой, кромѣ послѣдней, въ которой можетъ быть одна или двѣ цифры. Чтобы найти первую цифру корня, надо извлечь куб. корень изъ первой грани. Чтобы найти вторую цифру, надо изъ первой грани вычесть кубъ первой цифры корня, къ остатку снести вторую грань и число сотенъ получившагося числа раздѣлить на утроенный квадратъ найденной цифры корня; полученное отъ дѣленія число надо испытать. Слѣдующія цифры корня находятся по тому же пріему.

Если, послѣ снесенія грани, число сотенъ получившагося числа окажется меньше дѣлителя, т.-е. утроеннаго квадрата найденной части корня, то въ корнѣ ставятъ нуль и сносятъ слѣдующую грань.

191. Число цифръ корня. Изъ разсмотрѣнія способа нахожденія цифръ кубичнаго корня слѣдуетъ, что **въ кубичномъ корнѣ столько цифръ, сколько въ подкоренномъ числѣ граней, по три цифры каждая, кромѣ одной, которая можетъ имѣть и двѣ цифры, и одну.**

2. Извлеченіе приближенныхъ кубичныхъ корней.

192. Предварительное замѣчаніе. Числа, изъ которыхъ кубичный корень можетъ быть выраженъ цѣлымъ или дробнымъ числомъ, наз. **точными** кубами. Изъ остальныхъ чиселъ можно извлекать только приближенные кубичные корни.

193. Опредѣленія. 1) **Приближеннымъ кубичнымъ корнемъ изъ даннаго числа** (цѣлаго или дробнаго) **съ точностью до 1 наз. каждое изъ двухъ такихъ цѣлыхъ чиселъ, между кубами которыхъ заключается данное число и которыя различаются одно отъ другого на 1**; меньшее изъ этихъ чиселъ называется приближеннымъ корнемъ **съ недостаткомъ**, а большее—приближеннымъ корнемъ **съ избыткомъ.**

Такъ, если A есть данное число, то приближенные кубичные корни изъ A съ точностью до 1 будутъ два такія цѣлыя числа x и $x+1$, которыя удовлетворяютъ неравенствамъ:

$$x^3 < A < (x+1)^3.$$

2) **Приближеннымъ кубичнымъ корнемъ изъ даннаго числа** (цѣлаго или дробнаго) **съ точностью $^1/_n$ наз. каждая изъ двухъ такихъ дробей съ знаменателемъ n, между кубами которыхъ заключается данное число и которыя различаются одна**

отъ другой на $^1/_n$; меньшая изъ этихъ дробей наз. приближеннымъ корнемъ съ недостаткомъ, а большая—приближеннымъ корнемъ съ избыткомъ.

Такъ, если данное число есть A, то приближенные кубичные корни изъ A съ точностью до $^1/_n$ будутъ двѣ такія дроби $^m/_n$ и $^{m+1}/_n$, которыя удовлетворяютъ двойному неравенству:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^3 < A < \left(\frac{m+1}{n}\right)^3.$$

104. Правило 1. **Чтобы извлечь изъ даннаго числа приближенный кубичный корень съ недостаткомъ, съ точностью до 1, извлекаютъ кубичный корень изъ наибольшаго цѣлаго куба, заключающагося въ цѣлой части даннаго числа.**

Пусть, напр., требуется найти приближенный куб. корень, съ точностью до 1, изъ числа 500,6. Для этого находимъ куб. корень изъ наибольшаго цѣлаго куба, заключающагося въ 500; это есть 7. Такъ какъ $7^3 < 500$, то, и подавно, $7^3 < 500{,}6$; съ другой стороны, $8^3 > 500$, и такъ какъ 0,6 не составляютъ ни одной цѣлой единицы, то $8^3 > 500{,}6$. Слѣд., каждое изъ чиселъ: 7 и 8 есть приближенный куб. корень съ точностью до 1 изъ числа 500,6; первое есть приближенный куб. корень съ недостаткомъ, второе—съ избыткомъ.

Примѣры.

1) $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = 0$ или 1 (до 1); 2) $\sqrt[3]{560\frac{7}{8}} = 8$ или 9 (до 1);

3) $\sqrt[3]{\frac{3846}{17}} = \sqrt[3]{226\frac{4}{17}} = 6$ или 7 (до 1).

Правило 2. **Чтобы извлечь изъ даннаго числа приближенный кубичный корень съ недостаткомъ, съ точностью до $^1/_n$, умножають данное число на n^3, изъ полученнаго произведенія извлекаютъ кубичный корень съ недостаткомъ, съ точностью до 1, и дѣлятъ его на n.**

Дѣйствительно, пусть искомые приближенные корни изъ даннаго числа A съ точностью до $\frac{1}{n}$ будутъ $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$. Согласно опредѣленію, эти дроби должны удовлетворять двойному неравенству:

$$\left(\frac{x}{n}\right)^3 < A < \left(\frac{x+1}{n}\right)^3, \text{ т.-е. } \frac{x^3}{n^3} < A < \frac{(x+1)^3}{n^3}.$$

Умноживъ всѣ члены неравенства на n^3, получимъ:

$$x^3 < An^3 < (x+1)^3.$$

Изъ этого неравенства видно, что числа x и $x+1$ суть приближенные кубичные корни изъ числа An^3, съ точностью до 1. Найдя эти корни такъ, какъ было указано ранѣе, мы получимъ числителей дробей $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, а раздѣливъ ихъ на n, найдемъ и самыя дроби.

Примѣры.

1) Найти $\sqrt[3]{5}$ съ точностью до $^1/_8$.

$5.8^3 = 2560$; $\sqrt[3]{2560} = 13$ или 14 (до 1); $\sqrt[3]{5} = {}^{13}/_8$ или ${}^{14}/_8$ (до $^1/_8$).

2) Найти $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ до сотыхъ долей.

$^4/_9 . 100^3 = 444444\ ^4/_9$; $\sqrt[3]{444444} = 76$ или 77; $\sqrt[3]{\frac{4}{9}} = 0{,}76$ или $0{,}77$ (до 0,01).

3) Найти $\sqrt[3]{2}$ съ десятичнымъ приближеніемъ.

$\sqrt[3]{2} = 1{,}25\ldots$

	1
$3.1^2 = 3$	10'00
$3.1^2.2 =$	6
$3.1.2^2 =$	12
$2^3 =$	8
	728
$3.12^2 = 432$	2720'00
$3.12^2.5 =$	2160
$3.12.5^2 =$	900
$5^3 =$	125
	225125
	46875

Сначала извлекаемъ корень съ точностью до 1; это будетъ 1. Чтобы найти цифру десятыхъ, надо было бы умножить 2 на 10^3, т.-е. къ 2 приписать три нуля. Очевидно, это все равно, что приписать къ остатку три нуля. Найдя цифру десятыхъ, можемъ снова приписать къ остатку три нуля и искать цифру сотыхъ и т. д.

3. Извлеченіе кубичныхъ корней изъ дробей.

135. Точный куб. корень изъ несократимой дроби можно извлечь лишь въ томъ случаѣ, когда оба члена дроби точные кубы (§ 163, II). Въ этомъ случаѣ достаточно извлечь корень изъ числителя и знаменателя отдѣльно; напр.

$$\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{3}{5}.$$

Приближенные куб. корни изъ дробей обыкновенно находятся такъ, какъ указано въ предыдущемъ параграфѣ (примѣръ 2). Впрочемъ, можно поступать иначе. Объяснимъ это на слѣдующемъ примѣрѣ:

Найти приближенный $\sqrt[3]{\frac{5}{24}}$.

Изъ разложенія $24 = 2.2.2.3$ видимъ, что если оба члена дроби умножимъ на 3^2, то сдѣлаемъ знаменателя точнымъ кубомъ; сдѣлавъ это, извлечемъ корень изъ числителя и знаменателя отдѣльно:

$$\sqrt[3]{\frac{5}{24}} = \sqrt[3]{\frac{5.3^2}{24.3^2}} = \sqrt[3]{\frac{45}{2^3.3^3}} = \frac{\sqrt[3]{45}}{2.3} = \frac{\sqrt[3]{45}}{6}.$$

Найдя $\sqrt[3]{45}$ съ какою-нибудь точностью до $\frac{1}{n}$ и раздѣливъ результатъ на 6, мы получимъ приближенный куб. корень изъ дроби $\frac{5}{24}$ съ точностью до $\frac{1}{6n}$.

ГЛАВА VI.

Понятіе объ ирраціональномъ числѣ.

196. Соизмѣримыя и несоизмѣримыя значенія величинъ. Какъ извѣстно изъ геометріи, общею мѣрою двухъ значеній одной и той же величины (напр., двухъ длинъ, двухъ угловъ, двухъ вѣсовъ и т. п.) наз. такое значеніе этой же величины, которое въ каждомъ изъ нихъ содержится цѣлое число разъ.

Нахожденіе общей мѣры производится способомъ послѣдовательнаго дѣленія такъ, какъ это указывается въ геометріи для двухъ отрѣзковъ прямой. Въ геометріи же доказывается, что существуютъ такіе отрѣзки прямой, которые не имѣютъ общей мѣры; таковы, напр., основаніе и боковая сторона равнобедреннаго треугольника, у котораго углы при основаніи равны $36^\circ (= {}^2/_5 d)$, или діагональ и сторона квадрата. Соотвѣтственно этому мы можемъ представить себѣ, что и другія величины могутъ получать значенія, не имѣющія общей мѣры.

Два значенія одной и той же величины называются **соизмѣримыми**, если они имѣютъ общую мѣру, и **несоизмѣримыми**, если такой мѣры они не имѣютъ.

197. Понятіе объ измѣреніи. Чтобы избѣжать излишней отвлеченности, мы будемъ говорить, какъ въ этомъ параграфѣ, такъ и въ послѣдующихъ, не о величинахъ вообще, а объ одной наиболѣе простой величинѣ — именно, о длинѣ отрѣзка прямой.

A ——————————— B

C ———————— D

Черт. 19.

Пусть требуется измѣрить длину отрѣзка AB при помощи единицы длины CD (черт. 19). Различимъ тогда 2 возможныхъ случая:

1-й случай, когда отрѣзокъ AB соизмѣримъ съ единицей CD, т.-е. когда существуетъ общая мѣра отрѣзковъ AB и CD. Если окажется, что общей мѣрой будетъ сама единица CD и она въ AB содержится m разъ, то результатъ измѣренія выразится цѣлымъ числомъ m ($AB = mCD$); если же общей мѣрой окажется нѣкоторая $^1/_n$ доля CD, которая въ AB содержится m разъ, то результатъ измѣренія выразится дробью $^m/_n$ (т.-е. $AB = {}^m/_n CD$). Значитъ, въ разсматриваемомъ случаѣ мы всегда можемъ получить точный результатъ измѣренія, т.-е. всегда можемъ получить такое цѣлое или дробное число, которое въ точности выражаетъ длину AB въ единицѣ CD. Объ этомъ числѣ мы будемъ говорить, что оно измѣряетъ отрѣзокъ AB (или служитъ ему мѣрою).

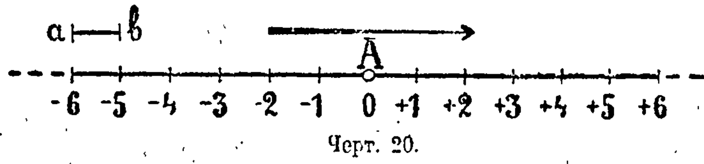
2-й случай, когда отрѣзокъ AB несоизмѣримъ съ единицей CD, т.-е. когда не существуетъ общей мѣры AB и CD. Въ этомъ случаѣ мы не можемъ получить точнаго результата измѣренія въ видѣ цѣлаго или дробнаго числа. Дѣйствительно, если предположимъ, что отрѣзокъ AB въ точности равняется $^m/_n$ CD, то это значило бы, что $^1/_n$ доля CD содержится въ AB ровно m разъ; тогда, значитъ, эта доля была бы общею мѣрою AB и CD. Поэтому въ томъ случаѣ, когда такой мѣры не существуетъ, точнаго результата измѣренія при помощи цѣлыхъ или дробныхъ чиселъ мы получить не можемъ.

Но тогда мы можемъ находить приближенные результаты измѣренія и притомъ съ какою угодно точностью. Положимъ, напр., что мы желаемъ найти приближенный результатъ измѣренія съ точностью до $^1/_{100}$ (и вообще до $^1/_n$). Тогда, раздѣливъ единицу CD на 100 (вообще на n) равныхъ частей, станемъ откладывать на AB одну такую часть столько разъ, сколько можно. Пусть окажется, что она укладывается въ AB болѣе 123 разъ, но менѣе 124 разъ (вообще болѣе m разъ, но менѣе $m+1$ разъ). Тогда каждое изъ чиселъ $^{123}/_{100}$ и $^{124}/_{100}$ (вообще $^m/_n$ и $^{m+1}/_n$) можно назвать приближеннымъ результатомъ измѣренія отрѣзка AB, первое число—съ недостаткомъ, а второе—съ избыткомъ.

Замѣтимъ, что этимъ путемъ мы можемъ находить приближенные результаты измѣренія и въ случаѣ 1-мъ, т.-е. когда

измѣряемый отрѣзокъ AB соизмѣримъ съ единицею CD; только **въ этомъ случаѣ** мы можемъ найти также и точный результатъ, если пожелаемъ, тогда какъ въ случаѣ 2-мъ такого результата мы никогда не получимъ.

198. Соотвѣтствіе между числами и точками прямой. Для лучшаго представленія всего того, что мы будемъ говорить далѣе, мы обратимся къ наглядному способу изображенія чиселъ помощью направленныхъ отрѣзковъ прямой, къ способу, къ которому мы уже прибѣгали въ началѣ алгебры (§ 14), когда говорили о числахъ положительныхъ и отрицательныхъ. Для этого возьмемъ безконечную въ обѣ стороны прямую (черт. 20), на которой какую-нибудь точку A примемъ за начало отрѣзковъ; кромѣ того, условимся, какое изъ двухъ направленій этой прямой считать положительнымъ и какое отрицательнымъ (за положительное направленіе мы будемъ всегда принимать направленіе слѣва направо, указанное на чертежѣ стрѣлкой). Такую прямую мы уже условились (§ 14) называть **числовою прямою**. При данной единицѣ длины ab (указанной на чертежѣ) каждому числу p, цѣлому или дробному, положительному или отрицательному, соотвѣтствуетъ на числовой прямой опредѣленная точка, представляющая собою конецъ того соизмѣримаго съ ab отрѣзка, который измѣряется этимъ числомъ p и отложенъ на числовой прямой отъ начальной точки A вправо отъ нея, если число p положительное, и влѣво, если оно отрицательное. На нашемъ чертежѣ, напр., указаны точки, соотвѣтствующія цѣлымъ числамъ: $+1$, $+2$, $+3$... -1, -2, -3...; дробнымъ числамъ соотвѣтствуютъ промежуточныя точки.



Черт. 20.

Но если всякому числу p мы можемъ найти соотвѣтствующую точку на числовой прямой, то нельзя сказать, обратно, чтобы всякой точкѣ этой прямой мы могли найти соотвѣтствую-

(черт. 20), есть конецъ такого отрѣзка AB, который несоизмѣримъ съ единицею ab, то такой точкѣ не будетъ соотвѣтствовать никакого числа, такъ какъ несоизмѣримый отрѣзокъ AB точно не выражается ни цѣлымъ, ни дробнымъ числомъ.

199. Понятіе объ ирраціональномъ числѣ. Чтобы установить соотвѣтствіе между числами и всѣми точками числовой прямой и такимъ образомъ получить возможность выражать числами не одни только соизмѣримые съ единицей отрѣзки прямой, но и несоизмѣримые, надо расширить область чиселъ, введя въ нее, сверхъ тѣхъ чиселъ, которыя мы разсматривали до сего времени, еще числа особаго рода, которыя мы примемъ за мѣру несоизмѣримыхъ съ единицею значеній величины. Числа эти мы будемъ называть **ирраціональными** (или **несоизмѣримыми**), а числа цѣлыя и дробныя, которыя мы знали до сего времени, будемъ называть **раціональными** (или **соизмѣримыми**).

Мы не будемъ устанавливать здѣсь вполнѣ строгаго опредѣленія ирраціональныхъ чиселъ и дѣйствій надъ ними. Ограничимся сообщеніемъ только самыхъ необходимыхъ свѣдѣній.

Допускаютъ, что при данной единицѣ длины каждой точкѣ B числовой прямой (черт. 20) соотвѣтствуетъ опредѣленное число, принимаемое за мѣру того отрѣзка AB, концомъ котораго служитъ эта точка B. Если отрѣзокъ AB соизмѣримъ съ единицей длины, то точкѣ B соотвѣтствуетъ раціональное число; если же онъ несоизмѣримъ съ единицей длины, то точкѣ B соотвѣтствуетъ нѣкоторое ирраціональное число, которое нельзя точно выразить цифрами, но можно обозначить какимъ-нибудь знакомъ, напр., одною изъ буквъ греческаго алфавита: α, β, γ...

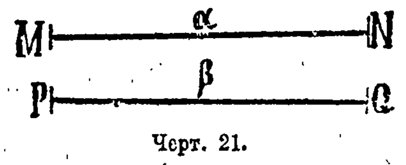
Каждый приближенный результатъ измѣренія несоизмѣримаго отрѣзка AB, которому мѣрою служитъ ирраціональное число α, мы будемъ называть **приближеннымъ значеніемъ** этого числа α. Такъ, если, измѣривъ отрѣзокъ AB съ точностью до $^1/_n$, мы получили числа $^m/_n$ и $^{m+1}/_n$, то каждое изъ нихъ мы назовемъ приближеннымъ значеніемъ числа α съ точностью до $^1/_n$. Такъ какъ число $^m/_n$ измѣряетъ соизмѣримый отрѣзокъ

меньшій AB, а число $^{m+1}/_n$ измѣряютъ соизмѣримый отрѣзокъ, большій AB, то ирраціональное число α, принимаемое нами за мѣру отрѣзка AB, мы условимся считать большимъ числа $^m/_n$ и меньшимъ числа $^{m+1}/_n$. Вслѣдствіе этого изъ двухъ чиселъ: $^m/_n$ и $^{m+1}/_n$ первое мы будемъ называть приближеннымъ значеніемъ ирраціональнаго числа α съ недостаткомъ, а второе—приближеннымъ значеніемъ этого числа съ избыткомъ.

Ирраціональное число α мы будемъ считать **извѣстнымъ**, если указанъ способъ, посредствомъ котораго можно находить приближенныя значенія этого числа съ любою степенью точности (примѣръ этому мы вскорѣ увидимъ).

Число (раціональное или ирраціональное) считается **положительнымъ** или **отрицательнымъ**, смотря потому, измѣряетъ ли оно отрѣзокъ прямой, имѣющій положительное направленіе, или отрицательное; на числовой прямой (черт. 20) положительнымъ числамъ соотвѣтствуютъ точки, лежащія направо отъ начальной точки A, а отрицательнымъ числамъ соотвѣтствуютъ точки, расположенныя налѣво отъ A. Отрицательныя ирраціональныя числа, такъ же какъ и раціональныя, выражаются посредствомъ знака минусъ, поставленнаго передъ абсолютной величиной числа, а положительныя числа посредствомъ знака плюсъ (или совсѣмъ безъ знака).

200. Равенство и неравенство чиселъ. Два числа α и β (раціональныя или ирраціональныя) считаются равными, если, при одной и той же единицѣ длины, они служатъ мѣрою двухъ равныхъ отрѣзковъ прямой (черт. 21) MN и PQ. Если же отрѣзокъ MN, измѣряемый числомъ α, больше (или меньше) отрѣзка PQ, измѣряемаго числомъ β (при той же единицѣ длины), то число α считается большимъ (или меньшимъ) числа β.



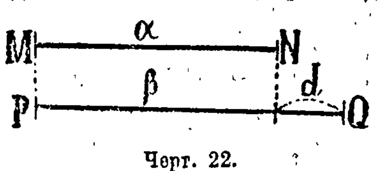
Черт. 21.

Полезно замѣтить слѣдующій признакъ равенства ирраціональныхъ чиселъ [1]):

[1]) Этотъ признакъ примѣняется въ геометріи для опредѣленія равенства отношеній, представляющихъ собою ирраціональныя числа.

ирраціональныя числа α и β равны, если ихъ приближенныя значенія, взятыя оба съ недостаткомъ, или оба съ избыткомъ, и вычисленныя съ произвольною, но одинаковою точностью, оказываются постоянно другъ другу равными.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, предположимъ, что числа α и β неравны, пусть, напр., $\alpha < \beta$. Тогда отрѣзокъ MN (черт. 22), измѣряемый числомъ α, меньше отрѣзка PQ, измѣряемаго числомъ β. Положимъ, что разность $PQ - MN$ есть отрѣзокъ d. Возьмемъ такую $^1/_n$ долю единицы длины, которая была бы меньше d (что всегда возможно, какъ бы мала длина d ни была), и найдемъ прибл. результаты измѣренія отрѣзковъ MN и PQ съ точностью до этой доли единицы. Очевидно, что такая доля, содержась въ d по крайней мѣрѣ 1 разъ, содержится въ PQ бо́льшее число разъ, чѣмъ въ MN; значитъ, тогда прибл. результатъ измѣренія отрѣзка MN будетъ меньше прибл. результата измѣренія отрѣзка PQ (если оба результата взять съ недостаткомъ, или оба съ избыткомъ). Но эти результаты измѣренія суть вмѣстѣ съ тѣмъ и прибл. значенія, съ точностью до $^1/_n$, чиселъ α и β. Значитъ, если $\alpha < \beta$, то, начиная съ нѣкотораго достаточно большого значенія знаменателя n въ дроби $^1/_n$, прибл. значеніе числа α окажется меньшимъ прибл. значенія числа β (если оба значенія взяты съ недостаткомъ или оба съ избыткомъ). Поэтому въ томъ случаѣ, когда прибл. значенія чиселъ α и β равны другъ другу при всякой степени точности, мы должны заключить, что числа равны.



Черт. 22.

201. Дѣйствія надъ ирраціональными числами. Пусть α, β, γ... будутъ данныя положительныя ирраціональныя числа. Обозначимъ соотвѣтственно черезъ a, b, c... какія угодно приближенныя значенія этихъ чиселъ, взятыя съ недостаткомъ, и черезъ A, B, C... какія угодно приближенныя значенія ихъ, взятыя съ избыткомъ. Тогда мы можемъ высказать слѣдующія опредѣленія:

1°. Сложить числа α, β, γ, значить найти число, которое было бы больше каждой суммы $a + b + c + \ldots$ и меньше каждой суммы $A + B + C + \ldots$

Положимъ, напр., что рѣчь идетъ о двухъ числахъ α и β, которыхъ десятичныя приближенныя значенія, взятыя съ недостаткомъ, будутъ слѣдующія [1]:

	до 0,1	до 0,01	до 0,001	до 0,0001	...
Для числа α	1,7	1,73	1,732	1,7320	...
Для числа β	1,4	1,41	1,414	1,4142	...

(Соотвѣтствующія приближенныя значенія съ избыткомъ получаются изъ этихъ чиселъ посредствомъ увеличенія послѣдняго десятичнаго знака на 1.)

Тогда сложить α и β значитъ найти число, которое было бы

больше каждой изъ суммъ:

$1{,}7 + 1{,}4 \ldots\ldots = 3{,}1$
$1{,}73 + 1{,}41 \ldots = 3{,}14$
$1{,}732 + 1{,}414 \ldots = 3{,}146$
$1{,}7320 + 1{,}4142 = 3{,}1462$

и меньше каждой изъ суммъ:

$1{,}8 + 1{,}5 \ldots\ldots = 3{,}3$
$1{,}74 + 1{,}42 \ldots = 3{,}16$
$1{,}733 + 1{,}415 \ldots = 3{,}148$
$1{,}7321 + 1{,}4143 = 3{,}1464$

2°. Перемножить числа α, β, γ... значить найти число, которое было бы больше каждаго произведенія abc... и меньше каждаго произведенія ABC... [2]).

Такъ, беря приближенныя значенія чиселъ α и β, указанныя выше, мы можемъ сказать, что произведеніе $\alpha\beta$ представляетъ собою число, которое

больше каждаго изъ произведеній:

$1{,}7 . 1{,}4 \ldots\ldots = 2{,}38$
$1{,}73 . 1{,}41 \ldots = 2{,}4393$
$1{,}732 . 1{,}414 \ldots = 2{,}449048$
$1{,}7320 . 1{,}4142 = 2{,}44939440$

и меньше каждаго изъ произведеній:

$1{,}8 . 1{,}5 \ldots\ldots = 2{,}70$
$1{,}74 . 1{,}42 \ldots = 2{,}4708$
$1{,}733 . 1{,}415 \ldots = 2{,}452195$
$1{,}7321 . 1{,}4143 = 2{,}44970903$

---

[1]) Взяты приближенныя значенія чиселъ: $\alpha = \sqrt{3}$ и $\beta = \sqrt{2}$.

[2]) Въ теоріи ирраціональныхъ чиселъ доказывается, что искомое число, о которомъ говорится въ опредѣленіяхъ 1° и 2° (а слѣдов., и въ остальныхъ), при всякихъ данныхъ числахъ α, β, γ..., существуетъ и только одно.

3°. Возвысить число a въ степень съ цѣлымъ положительнымъ показателемъ n значитъ найти произведеніе $aaa... a$, составленно изъ n одинаковыхъ сомножителей, равныхъ a.

Это произведеніе, согласно опредѣленію умноженія, должн быть больше каждаго a^n и меньше каждаго A^n.

4°. Обратныя дѣйствія, т.-е. вычитаніе, дѣленіе и извлечені корня, опредѣляются для ирраціональныхъ чиселъ такъ же какъ и для раціональныхъ; такъ, вычесть изъ числа a число значитъ найти такое число x, чтобы сумма $\beta + x$ равнялась a, и т. д.

Если изъ чиселъ a, β, γ... нѣкоторыя будутъ раціональныя, то въ данныхъ выше опредѣленіяхъ (прямыхъ дѣйствій) вмѣст приближенныхъ значеній такихъ чиселъ можно брать точны ихъ величины; если, напр., a ирраціональное число, а β раціо нальное, напр., $\beta = 5$, то, обозначивъ, какъ и прежде, черезъ любое приближенное значеніе числа a съ недостаткомъ, черезъ A любое приближенное значеніе числа a съ избыткомъ, можемъ сказать, что сумма $a + 5$ есть такое число, которо больше каждой суммы $a + 5$ и меньше каждой суммы $A + 5$.

Произведеніе ирраціональнаго числа на нуль принимаетс равнымъ 0.

Когда среди чиселъ a, β, γ... встрѣчаются отрицательныя, то дѣйствія надъ ними производятся согласно правиламъ, дан нымъ для отрицательныхъ раціональныхъ чиселъ; напр., пр умноженіи двухъ чиселъ одинаковые знаки даютъ плюсъ, разные — минусъ, а абсолютныя величины перемножаются.

При болѣе обстоятельномъ разсмотрѣніи дѣйствій надъ ирра ціональными числами, можно установить, что этимъ дѣйствіямъ принадлежатъ тѣ же свойства, которыя нами были указань для дѣйствій надъ числами раціональными (§§ 20, 33, 39) напр., сумма и произведеніе обладаютъ свойствами перемѣсти тельнымъ и сочетательнымъ; произведеніе, кромѣ того, ещ обладаетъ распредѣлительнымъ свойствомъ, и т. п. Свойства выражаемыя неравенствами, также примѣнимы къ числамъ ирраціональнымъ; такъ, если $a > \beta$, то $a + \gamma > \beta + \gamma$, $a\gamma > \beta\gamma$ (если $\gamma > 0$) и $a\gamma < \beta\gamma$ (если $\gamma < 0$), и т. п.

202. Замѣчаніе о приближенномъ вычисленіи. На практикѣ, при совершеніи какого-либо дѣйствія надъ ирраціональными числами, приходится большею частью довольствоваться приближеннымъ результатомъ этого дѣйствія. Въ этомъ случаѣ весьма важно знать, какъ велика погрѣшность, допущенная при этомъ. Покажемъ на примѣрѣ, какъ можно опредѣлять такую погрѣшность. Пусть требуется вычислить произведеніе $\alpha\beta$ въ томъ случаѣ, если прибл. значенія чиселъ α и β будутъ тѣ, которыя указаны выше (на стр. 202). Тогда, ограничиваясь для α и β прибл. значеніями съ точностью до 0,0001, мы будемъ имѣть (по опредѣленію умноженія):

$$2{,}44939440 < \alpha\beta < 2{,}44970903.$$

Мы видимъ, что у крайнихъ чиселъ этого двойного неравенства одинаковы числа цѣлыхъ, десятыхъ, сотыхъ и тысячныхъ; такъ какъ произведеніе $\alpha\beta$ заключается между этими крайними числами, то, значитъ, $\alpha\beta = 2{,}449 + k$, гдѣ k есть нѣкоторое положительное число, меньшее 0,001; потому, отбросивъ k и принявъ, что $\alpha\beta = 2{,}449$, мы будемъ имѣть прибл. значеніе этого произведенія съ недостаткомъ, при чемъ ошибка менѣе 0,001.

Подобнымъ образомъ можно поступать при вычисленіи суммы и степени.

При вычисленіи разности и частнаго приходится нѣсколько измѣнить указанный пріемъ. Положимъ, напр., надо вычислить разность $\alpha - \beta$ тѣхъ же чиселъ, о которыхъ мы сейчасъ говорили. Возьмемъ сначала для α значеніе съ недостаткомъ, напр., 1,732, а для β значеніе съ избыткомъ, напр., 1,415; тогда для разности $\alpha - \beta$ мы получимъ значеніе съ недостаткомъ, именно 0,317. Послѣ этого возьмемъ для α значеніе съ избыткомъ, напр., 1,733, а для β значеніе съ недостаткомъ, 1,414; тогда для $\alpha - \beta$ мы получимъ значеніе съ избыткомъ, именно 0,319. Слѣдовательно, $0{,}317 < \alpha - \beta < 0{,}319$. Поэтому, положивъ $\alpha - \beta = 0{,}31$, мы будемъ имѣть приближенное значеніе этой разности съ недостаткомъ, при чемъ ошибка менѣе 0,01 (положивъ $\alpha - \beta = 0{,}317$, получимъ приближенное значеніе съ недостаткомъ съ точностью до $^2/_{1000}$). Такъ же надо поступать при вычисленіи частнаго $\alpha : \beta$.

ГЛАВА VII.

Ирраціональныя значенія радикаловъ.

203. Приближенные m-ые корни. Приближеннымъ ариѳметическимъ корнемъ m-ой степени, съ точностью до $^1/_n$, изъ положительнаго числа A называется каждая изъ двухъ такихъ ариѳметическихъ дробей: $^x/_n$ и $^{x+1}/_n$, между m-ыми степенями которыхъ заключается число A; такимъ образомъ, дроби эти должны удовлетворять двойному неравенству:

$$\left(\frac{x}{n}\right)^m \leqslant A < \left(\frac{x+1}{n}\right)^m.$$

Здѣсь знакъ = (въ соединеніи со знакомъ $<$) мы поставили для того, чтобы не дѣлать исключенія для случая, когда число A есть точная m-ая степень, и цѣлое число n взято такимъ, что m-ая степень дроби $^x/_n$ оказывается равной A; тогда, конечно, число $^x/_n$ будетъ точнымъ корнемъ m-ой степени изъ A.

При $n = 1$ указанное неравенство даетъ:

$$x^m \leqslant A < (x+1)^m.$$

Тогда цѣлыя числа x и $x+1$ будутъ приближенными корнями m-ой степени изъ A съ точностью до 1.

203а. Теорема. Какъ бы мала ни была дробь $^1/_n$, всегда возможно найти съ точностью до этой дроби приближенные корни любой степени изъ всякаго положительнаго числа A.

Док. Вообразимъ, что числа натуральнаго ряда возвышены въ m-ую степень и полученные результаты выписаны въ возрастающій рядъ:

$$0^m = 0,\quad 1^m = 1,\quad 2^m,\quad 3^m,\quad 4^m \ldots a^m,\quad (a+1)^m \ldots$$

Будемъ въ этомъ ряду искать число, равное произведенію An^m, или близкое къ нему. Очевидно, что переходя въ ряду слѣва направо все далѣе и далѣе, мы всегда встрѣтимъ въ немъ два такихъ рядомъ стоящихъ числа, что предыдущее будетъ

равно или меньше An^m, а послѣдующее больше этого произведенія. Пусть эти числа будутъ a^m и $(a+1)^m$, такъ что:

$$a^m \leqslant An^m < (a+1)^m.$$

Тогда, раздѣливъ всѣ числа на n^m, получимъ:

$$\frac{a^m}{n^m} \leqslant A < \frac{(a+1)^m}{n^m}\text{, т.-е. } \left(\frac{a}{n}\right)^m \leqslant A < \left(\frac{a+1}{n}\right)^m.$$

Такимъ образомъ, мы найдемъ двѣ дроби: $^a/_n$ и $^{a+1}/_n$, которыя, согласно опредѣленію, и будутъ приближенными корнями m-ой степени изъ числа A.

204. Точное значеніе $\sqrt[m]{A}$ въ томъ случаѣ, когда A не есть точная m-ая степень. Разъяснимъ, что въ этомъ случаѣ точная величина $\sqrt[m]{A}$ есть нѣкоторое ирраціональное число α, которое больше всякаго приближеннаго корня m-ой степени изъ A, если этотъ корень взять съ недостаткомъ, и меньше всякаго приближеннаго корня m-ой степени изъ A, если этотъ корень взятъ съ избыткомъ.

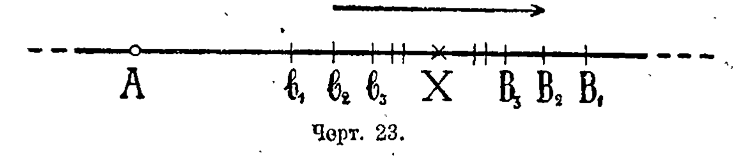
```
√3 = 1,7320...
 1
 27|20'0
  7|18 9
 343|1 10'0
   3|1 02 9
 3462|7 10'0
    2|6 92 4
 34640|1760,0
 ...........
```

Для большей ясности мы будемъ говорить не о корнѣ m-ой степени вообще, а о корнѣ квадратномъ, и не изъ какого-нибудь положительнаго числа A, а изъ одного опредѣленнаго числа: напр., мы будемъ говорить о $\sqrt{3}$. Вообразимъ, что мы вычислили неограниченный рядъ приближенныхъ корней квадратныхъ изъ 3-хъ съ точностью: до 0,1, до 0,01, до 0,001, до 0,0001 и т. д. Эти значенія будутъ:

Съ недостаткомъ:	1,7	1,73	1,732	1,7320	....
Съ избыткомъ:	1,8	1,74	1,733	1,7321	....

Отнесемъ всѣ эти числа къ числовой прямой, на которой точка A принята за начало отрѣзковъ (черт. 23). Пусть точки:

b_1, b_2, b_3... (и вообще точки b) будутъ соотвѣтствовать числамъ верхней строки (т.-е. $Ab_1 = 1{,}7$, $Ab_2 = 1{,}73...$, и т. д.), а точки B_1, B_2, B_3... (и вообще точки B) будутъ соотвѣтствовать числамъ нижней строки (т.-е. $AB_1 = 1{,}8$, $AB_2 = 1{,}74...$, и т. д.). Такъ



Черт. 23.

какъ каждый корень съ недостаткомъ всегда меньше каждаго корня съ избыткомъ (потому что квадратъ перваго меньше 3-хъ, а квадратъ второго больше 3-хъ), то каждая точка b должна лежать налѣво отъ каждой точки B. Съ другой стороны, разность между приближеннымъ корнемъ съ избыткомъ и соотвѣтствующимъ приближеннымъ корнемъ съ недостаткомъ (т.-е. число $^1/_n$) можетъ быть сдѣлана какъ угодно мала; поэтому при неограниченномъ увеличеніи степени точности, съ како мы находимъ приближенные квадратные корни изъ 3-хъ, промежутокъ на числовой прямой, отдѣляющій точки b отъ точекъ B (т.-е. промежутокъ b_1B_1, b_2B_2, b_3B_3...), становится все меньш и меньше и можетъ сдѣлаться какъ угодно малымъ. При этих условіяхъ мы должны допустить, что на прямой существуе нѣкоторая точка X (и только одна), которая служитъ границею, отдѣляющею ту часть прямой, на которой лежатъ вс точки b, отъ той части ея, на которой расположены всѣ точки B

Чтобы сдѣлать нагляднымъ существованіе такой точки X вообразимъ, что всѣ точки b, а также и вся часть прямой, лежащая налѣво отъ любой точки b, окрашена въ какой-нибуд одинаковый цвѣтъ, напр., въ зеленый, а всѣ точки B, а так же и вся часть прямой, лежащая направо отъ любой точки B окрашены въ другой цвѣтъ, напр., въ красный.

Такъ какъ каждая точка b лежитъ налѣво отъ каждо точки B, то ясно, что зеленая часть прямой не можетъ зайт на красную часть, и потому между этими частями должна быт какая-нибудь граница. Предположимъ, что зеленая часть будо отдѣляться отъ красной какимъ-нибудь неокрашеннымъ отрѣз

комъ прямой (напр., отрѣзкомъ b_3B_3, черт. 23); тогда, очевидно, промежутокъ между точками b и точками B не можетъ сдѣлаться меньше этого отрѣзка; между тѣмъ, какъ мы видѣли, этотъ промежутокъ можетъ сдѣлаться какъ угодно малымъ. Слѣдовательно, нельзя допустить, чтобы между зеленою и красною частями прямой былъ какой-нибудь, хотя бы и очень малый, отрѣзокъ прямой; но тогда остается только одно предположеніе, что границею между этими частями служитъ точка, напр., точка X (черт. 23) [1].

Обозначимъ буквою α положительное число, соотвѣтствующее этой точкѣ (т.-е. число, служащее мѣрой отрѣзка AX). Покажемъ, что квадратъ этого числа долженъ быть въ точности равенъ 3. Пусть a и A будутъ какія-нибудь приближенныя значенія числа α, первое съ недостаткомъ, а второе съ избыткомъ. Тогда α^2, согласно опредѣленію степени (§ 201, 3°), есть такое число, которое больше каждаго a^2 и меньше каждаго A^2. Но приближенными значеніями числа α называются приближенные результаты измѣренія отрѣзка AX, которому мѣрой служитъ число α; эти же результаты суть тѣ числа, которыми выражаются отрѣзки Ab_1, Ab_2..., AB_1, AB_2... (черт. 23), т.-е. тѣ числа, которыя составляютъ приближенные квадратные корни изъ 3-хъ. Число же, большее квадрата каждаго приближеннаго квадратнаго корня изъ 3-хъ, взятаго съ недостаткомъ, и меньшее квадрата каждаго приближеннаго квадратнаго корня изъ 3-хъ, взятаго съ избыткомъ, есть 3 (согласно опредѣленію приближенныхъ квадратныхъ корней изъ 3-хъ). Значитъ, α^2 и есть 3. Отсюда, конечно, слѣдуетъ, что число α должно быть ирраціональное, такъ какъ не существуетъ раціональнаго числа, квадратъ котораго равнялся бы 3.

Мы говорили о $\sqrt{3}$ только для простоты. Все сказанное объ этомъ частномъ случаѣ корня можно повторить о корнѣ любой m-ой степени изъ любого положительнаго числа A.

---

[1]) Это наглядное поясненіе заимствовано нами изъ книги „Leçons d'algèbre et d'analyse" par Jules Tannery; tome premier, 1906.

Такимъ образомъ, каково бы число A ни было, всегда можно сказать, что $\sqrt[m]{A}$ есть нѣкоторое число (раціональное или ирраціональное), m-ая степень котораго равна A. Поэтому всѣ свойства радикаловъ, основанныя на этомъ опредѣленіи корня (эти свойства выражены 3-мя теоремами § 166-го), примѣнимы также и къ ирраціональнымъ ихъ значеніямъ. Такимъ образомъ, каковы бы ни были положительныя числа a, b, c..., всегда можемъ писать:

$$\sqrt[m]{abc\ldots}=\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{b}.\sqrt[m]{c}\ldots;\ \sqrt[m]{a^{mn}}=a^n;\ \sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

ГЛАВА VIII.

Дѣйствія надъ радикалами.

Предварительное замѣчаніе. Всѣ корни, о которыхъ говорится въ этой главѣ, предполагаются ариѳметическими (§ 162).

205. Теорема. Величина корня не измѣнится, если показателя его и показателя подкоренного числа:

1°, умножимъ на одно и то же цѣлое и положительное число или —

2°, раздѣлимъ на одно и то же цѣлое и положительное число, если таковое дѣленіе совершается нацѣло.

Доказательство. 1°. Требуется доказать, что

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}},$$

если m, n и p—какія-нибудь цѣлыя положительныя числа. Для доказательства возвысимъ обѣ части этого предполагаемаго равенства въ np-ю степень. Отъ возвышенія правой части равенства получимъ a^{mp} (такъ какъ извлеченіе корня np-й степени и возвышеніе въ np-ю степень суть дѣйствія, взаимно уничтожающіяся). Чтобы возвысить лѣвую часть равенства въ np-ю степень, мы можемъ (§ 155, теор. 2) возвысить ее сна-

чала въ n-ую степень (получимъ a^m), а потомъ въ p-ую степень (получимъ a^{mp}). Мы видимъ, такимъ образомъ, что два числа $\sqrt[n]{a^m}$ и $\sqrt[np]{a^{mp}}$, отъ возвышенія въ одну и ту же np-ю степень даютъ одно и то же число a^{mp}; слѣдов., оба эти числа представляютъ собою ариѳметическій корень np-й степени изъ числа a^{mp}. Но ариѳметическій корень данной степени изъ даннаго числа можетъ быть только одинъ (§ 163, III); поэтому $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$.

2°. Читая доказанное равенство справа налѣво, т.-е. такъ

$$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m},$$

мы замѣчаемъ, что величина корня не измѣняется отъ дѣленія его показателя и показателя подкоренного числа на одно и то же цѣлое и положительное число, когда такое дѣленіе совершается нацѣло.

Замѣчаніе. Число p, на которое мы умножаемъ или дѣлимъ показателей корня и подкоренного числа, предполагалось нами цѣлымъ и положительнымъ, потому что если бы оно было дробное или отрицательное, то мы получили бы корень (и подкоренное число) съ показателемъ дробнымъ или отрицательнымъ, а корней съ такими показателями мы не разсматриваемъ. По той же причинѣ при дѣленіи показателей корня и подкоренного числа на p предполагается, что это дѣленіе выполняется нацѣло.

206. Слѣдствія. 1°. **Показателей нѣсколькихъ корней можно сдѣлать одинаковыми** (подобно тому, какъ знаменателей нѣсколькихъ дробей можно сдѣлать равными). Для этого достаточно найти общее кратное (лучше всего, наименьшее) показателей всѣхъ радикаловъ и помножить показателя каждаго изъ нихъ и показателя подкоренного числа на соотвѣтствующаго дополнительнаго множителя.

Примѣръ. $\sqrt{ax}$, $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[12]{x}$.

Наименьшее кратное показателей этихъ радикаловъ есть 12; дополнительными множителями будутъ: для перваго радикала 6,

для второго 4 и для третьяго 1; на основаніи доказанной теоремы можемъ написать:

$$\sqrt{ax} = \sqrt[12]{(ax)^6} = \sqrt[12]{a^6x^6};\ \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[12]{a^8};\ \sqrt[12]{x} = \sqrt[12]{x}.$$

2° **Показателя корня и показателя подкоренного числа можно сократить на ихъ общаго множителя, если онъ есть.**

Примѣръ. 1) $\sqrt[8]{a^6} = \sqrt[4]{a^3}$; 2) $\sqrt[6]{(1+x)^3} = \sqrt{1+x}$.

3°. **Если подкоренное выраженіе представляетъ собою произведеніе степеней, показатели которыхъ имѣютъ одного и того же общаго множителя съ показателемъ корня, то на этого множителя можно сократить всѣхъ показателей.**

Примѣръ. $\sqrt[12]{64a^{12}b^6x^{18}} = \sqrt[12]{(2a^2bx^3)^6} = \sqrt{2a^2bx^3}$.

207. Подобные радикалы. Подобными радикалами наз. такіе, у которыхъ одинаковы подкоренныя выраженія и одинаковы показатели радикаловъ (различаться могутъ, слѣдовательно, только множители, стоящіе передъ знакомъ радикала). Таковы, напр., выраженія: $+3a\sqrt[3]{xy}$ и $-5b\sqrt[3]{xy}$.

Чтобы опредѣлить, подобны ли между собою данные радикалы, слѣдуетъ предварительно упростить ихъ, т.-е. если возможно:

1) вынести изъ-подъ знака радикала тѣхъ множителей, изъ которыхъ возможно извлечь корень (§ 168, 1°);

2) освбодиться подъ радикалами отъ знаменателей дробей (§ 168, 3°);

3) понизить степень радикала, сокративъ показателей корня и подкоренного числа на общаго множителя (§ 206, 3°).

Примѣръ 1. Радикалы: $\sqrt[3]{8ax^3}$, $\sqrt[6]{64a^2y^{12}}$ окажутся подобными, если ихъ упростимъ такъ:

$$\sqrt[3]{8ax^3} = 2x\sqrt[3]{a};\ \sqrt[6]{64a^2y^{12}} = 2y^2\sqrt[6]{a^2} = 2y^2\sqrt[3]{a}.$$

Примѣръ 2. Три радикала $\sqrt{\frac{2x}{3}}$, $\sqrt{\frac{6}{x}}$ и $\sqrt{6x}$ окажутся

подобными, если освободимся подъ радикалами отъ знаменателей:

$$\sqrt{\frac{2x}{3}}=\sqrt{\frac{2x.3}{3.3}}=\sqrt{\frac{6x}{9}}=\frac{\sqrt{6x}}{3}=\frac{1}{3}\sqrt{6x}.$$

$$\sqrt{\frac{6}{x}}=\sqrt{\frac{6.x}{x.x}}=\sqrt{\frac{6x}{x^2}}=\frac{\sqrt{6x}}{x}=\frac{1}{x}\sqrt{6x}.$$

208. Дѣйствія надъ ирраціональными одночленами (т.-е. надъ одночленами, въ которые входитъ дѣйствіе извлеченія корня).

1°. **Сложеніе и вычитаніе.** Чтобы сложить или вычесть ирраціональные одночлены, соединяютъ ихъ знаками $+$ или $-$ и, если возможно, дѣлаютъ приведеніе подобныхъ радикаловъ.

Примѣры.

1) $a\sqrt[3]{a^4bc}+b\sqrt[3]{ab^7c}+c\sqrt[3]{abc^{10}}=a^2\sqrt[3]{abc}+b^3\sqrt[3]{abc}+c^4\sqrt[3]{abc}=$
$=(a^2+b^3+c^4)\sqrt[3]{abc};$

2) $15\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{32}-16\sqrt[3]{\frac{1}{16}}-\sqrt[3]{108}=15\sqrt[3]{4}-6\sqrt[3]{4}-4\sqrt[3]{4}-$
$-3\sqrt[3]{4}=2\sqrt[3]{4};$

3) $\frac{2}{3}x\sqrt{9x}+6x\sqrt{\frac{x}{4}}-x^2\sqrt{\frac{1}{x}}=2x\sqrt{x}+3x\sqrt{x}-x\sqrt{x}=4x\sqrt{x}.$

2°. **Умноженіе.** Такъ какъ $\sqrt[n]{abc...}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}...$ (§ 166, теор. 1), то и наоборотъ: $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}...=\sqrt[n]{abc}$; значитъ, **чтобы перемножить нѣсколько радикаловъ съ одинаковыми показателями, достаточно перемножить подкоренныя числа.**

Если для перемноженія даны радикалы съ различными показателями, то ихъ предварительно приводятъ къ одинаковому показателю.

Если передъ радикалами есть коэффиціенты, то ихъ перемножаютъ.

Примѣры.

1) $ab\sqrt{2a}\cdot\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{2}}\cdot 2b\sqrt{ab}=2a^2b\sqrt{a^2b^2}=2a^3b^2;$

2) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt[12]{3^3}\sqrt[12]{\left(\frac{1}{3}\right)^4}\cdot\sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}\right)^6}\sqrt[12]{3^3\cdot\frac{1}{3^4}\cdot\frac{1}{2^6}}=\sqrt[12]{\frac{1}{192}}.$

3°. **Дѣленіе.** Такъ какъ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (§ 166, теор. 3), то и наоборотъ: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$; **значитъ, чтобы раздѣлить радикалы съ одинаковыми показателями, достаточно раздѣлить ихъ подкоренныя числа.**

Радикалы съ различными показателями предварительно приводятъ къ одинаковому показателю.

Если есть коэффиціенты, то ихъ дѣлятъ.

Примѣры.

1) $-6\sqrt{\frac{2a-2b}{x^2}}:\frac{4}{5}\sqrt{\frac{a-b}{2bx^2}}=-\frac{6.5}{4}\sqrt{\frac{2(a-b)2bx^2}{x^2(a-b)}}=-15\sqrt{b}.$

2) $\sqrt[5]{\frac{2a+b}{a+b}-1}:\sqrt[5]{1-\frac{b}{a+b}}=\sqrt[5]{\frac{a}{a+b}}:\sqrt[5]{\frac{a}{a+b}}=1.$

3) $\frac{3a^2}{25b}\sqrt[4]{\frac{a^2}{a-x}}:\frac{2a}{5b}\sqrt{\frac{2a^3}{a-x}}=\frac{15a^2b}{50ab}\sqrt[4]{\frac{a^2(a-x)^2}{(a-x)4a^6}}=\frac{3}{10}\sqrt[4]{\frac{a-x}{4}}.$

4°. **Возвышеніе въ степень. Чтобы возвысить радикалъ въ степень, достаточно возвысить въ эту степень подкоренное число.** Дѣйствительно, изъ опредѣленія степени слѣдуетъ:

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a...}=\sqrt[n]{aaa...}=\sqrt[n]{a^m}.$$

Замѣтимъ, что теорема эта остается вѣрной и для показателя степени нуль, такъ какъ:

$$(\sqrt[n]{a})^0=1 \text{ и } \sqrt[n]{a^0}=\sqrt[n]{1}=1: \text{ слѣд., } (\sqrt[n]{a})^0=\sqrt[n]{a^0},$$

Примѣры.

1) $(\sqrt[4]{2ab^3x^2})^3 = \sqrt[4]{(2ab^3x^2)^3} = \sqrt[4]{8a^3b^9x^6} = b^2x\sqrt[4]{8a^3bx^2}$;

2) $\left(\sqrt[6]{\frac{2x}{1+x}}\right)^3 = \sqrt[6]{\left(\frac{2x}{1+x}\right)^3} = \sqrt{\frac{2x}{1+x}}$;

3) $\left(a\sqrt{a\sqrt[3]{b}}\right)^3 = a^3\left(\sqrt{a\sqrt[3]{b}}\right)^3 = a^3\sqrt{\left(a\sqrt[3]{b}\right)^3} = a^3\sqrt{a^3\left(\sqrt[3]{b}\right)^3} =$
$= a^3\sqrt{a^3b} = a^4\sqrt{ab}$

5°. **Извлеченіе корня.** Чтобы извлечь корень изъ радикала, достаточно перемножить ихъ показателей.

Требуется доказать, что $\sqrt{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[6]{a}, \sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[12]{a}$ и вообще:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Для доказательства возвысимъ обѣ части этого предполагаемаго равенства въ mn-ую степень. Отъ возвышенія правой части получимъ, по опредѣленію корня, a; чтобы возвысить лѣвую часть въ mn-ую степень, можно возвысить сначала въ n-ую степень, потомъ результатъ въ m-ую степень:

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{mn} = \left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^n\right]^m = \left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a.$$

Отсюда видно, что предполагаемое равенство вѣрно.

Слѣдствія. 1°. Результатъ нѣсколькихъ послѣдовательныхъ извлеченій корней не зависитъ отъ порядка дѣйствій; такъ:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} \text{ и } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}; \text{ слѣд., } \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}.$$

2°. Извлеченіе корня, у котораго показатель число составное, сводится къ послѣдовательному извлеченію корней, у которыхъ показатели простые множители этого составного числа. Такъ:

$$\sqrt[6]{a} = \sqrt[3]{\sqrt{a}};\ \sqrt[18]{a} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{a}}};\ \sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}.$$

Примѣръ. Преобразовать выраженіе $\sqrt[4]{x\sqrt[3]{2x^2\sqrt{\frac{3}{4}x^3}}}$.

Подведемъ множителя $2x^2$ подъ знакъ квадратнаго радикала, для чего предварительно возвысимъ его въ квадратъ:

$$\sqrt[4]{x\sqrt[3]{\sqrt{(2x^2)^2.\frac{3}{4}x^3}}}=\sqrt[4]{x\sqrt[3]{\sqrt{4x^4.\frac{3}{4}x^3}}}=\sqrt[4]{x\sqrt[3]{\sqrt{3x^7}}}=\sqrt[4]{x\sqrt[6]{3x^7}}.$$

Теперь подведемъ множителя x подъ знакъ радикала:

$$\sqrt[4]{\sqrt[6]{x^6.3x^7}}=\sqrt[4]{\sqrt[6]{3x^{13}}}=\sqrt[24]{3x^{13}}.$$

209. Дѣйствія надъ ирраціональными многочленами производятся по тѣмъ же правиламъ, какія были выведены раньше для многочленовъ раціональныхъ. Напр.:

1) $(\frac{2}{5}\sqrt{5}-5\sqrt{0,3})^2=\frac{4}{5}-4\sqrt{1,5}+7,5=8,3-4\sqrt{1,5};$

2) $\left(n\sqrt[3]{nx^2}-2n^2x\sqrt[3]{n^2x}+x\sqrt[3]{\frac{n}{x}}\right):n^2\sqrt[3]{nx^2}=$

$$=\frac{1}{n}-2x\sqrt[3]{\frac{n}{x}}+\frac{x}{n^2}\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{n}-2\sqrt[3]{nx^2}+\frac{1}{n^2}$$

210. Освобожденіе знаменателя дроби отъ радикаловъ. При вычисленіи дробныхъ выраженій, знаменатели которыхъ содержатъ радикалы, бываетъ полезно предварительно преобразовать дробь такъ, чтобы знаменатель ея не содержалъ радикаловъ. Чтобы указать пользу такого преобразованія, положимъ, что намъ нужно вычислить:

$$x=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}. \qquad (1)$$

Мы можемъ производить вычисленія или прямо по этой формулѣ, или же предварительно сдѣлать ея знаменателя раціональнымъ, для чего достаточно умножить оба члена дроби (1) на сумму $\sqrt{3}+\sqrt{2}$:

$$x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}. \qquad (2)$$

Формула (2), очевидно, удобнѣе для вычисленія, чѣмъ формула (1) [1].

Приведемъ простѣйшіе примѣры освобожденія знаменателя дроби отъ радикаловъ [2]:

1) $\frac{m}{n\sqrt{a}}$. Умноживъ числителя и знаменателя на $\sqrt{a}$, получимъ:

$$\frac{m}{n\sqrt{a}} = \frac{m\sqrt{a}}{na}.$$

Когда a есть число цѣлое составное, то полезно разложить его на простыхъ множителей съ цѣлью опредѣлить, какихъ множителей недостаетъ въ немъ для того, чтобы a было точнымъ квадратомъ. Тогда достаточно умножить оба члена дроби на квадратный корень изъ произведенія только недостающихъ множителей; такъ, напр.:

$$\frac{m}{\sqrt{40}} = \frac{m}{\sqrt{2.2.2.5}} = \frac{m\sqrt{2.5}}{\sqrt{2^3.5}.\sqrt{2.5}} = \frac{m\sqrt{10}}{\sqrt{2^4.5^2}} = \frac{m\sqrt{10}}{2^2.5} = \frac{m\sqrt{10}}{20}.$$

2) $\frac{m}{a+\sqrt{b}}$. Умножимъ числителя и знаменателя на $a-\sqrt{b}$:

$$\frac{m}{a+\sqrt{b}} = \frac{m(a-\sqrt{b})}{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})} = \frac{ma-m\sqrt{b}}{a^2-b}.$$

3) Подобно этому для освобожденія отъ радикала знаменателя дроби $\frac{m}{a-\sqrt{b}}$ достаточно умножить оба ея члена на $a+\sqrt{b}$

---

[1]) Удобнѣе не только потому, что она содержитъ 3 дѣйствія, а не 4, какъ формула (1), но также и потому, что при вычисленіи, которое по необходимости можетъ быть только приближенное, степень погрѣшности результата сравнительно просто опредѣляется по формулѣ (2). Такъ, вычисливъ $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$ съ точностью до $\frac{1}{1000}$, т.-е. положивъ $\sqrt{3}=1,732\ldots$ и $\sqrt{2}=1,414\ldots$ мы получимъ по формулѣ (2) число 3, 146 . . ., которое, какъ легко сообразить, точно до $\frac{2}{1000}$ (слѣд., въ этомъ числѣ нельзя ручаться за правильность цифры тысячныхъ).

[2]) Общій способъ освобожденія знаменателя дроби отъ радикаловъ указанъ ниже, въ § 235.

4) $\frac{m}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$. Умножимъ числителя и знаменателя на $\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$:

$$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\ (\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{m\sqrt{a}-m\sqrt{b}}{a-b}.$$

$$\frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\ (\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{m\sqrt{a}+m\sqrt{b}}{a-b}.$$

5) $\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$. Желая сначала освободить знаменателя отъ радикала $\sqrt{c}$, примемъ совокупность остальныхъ членовъ за одночленъ; тогда знаменатель приметъ видъ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{c}$. Умножимъ теперь числителя и знаменателя дроби на $(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}$. Тогда въ знаменателѣ получимъ: $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-c=(a+b-c)+$ $+2\sqrt{ab}$. Умноживъ опять числителя и знаменателя на $(a+b-$ $-c)-2\sqrt{ab}$, получимъ въ знаменателѣ раціональное выраженіе $(a+b-c)^2-4ba$.

6) Подобнымъ пріемомъ можно уничтожить въ знаменателѣ сколько угодно квадратныхъ радикаловъ. Пусть, напримѣръ, знаменатель есть: $\sqrt{a}+\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}$. Представивъ его въ видѣ: $\sqrt{a}+\sqrt{a}\sqrt{b}+\sqrt{a}\sqrt{c}+\sqrt{b}\sqrt{c}$, замѣчаемъ, что имѣемъ дѣло съ тремя различными радикалами: $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ и $\sqrt{c}$. Желая освободиться отъ радикала $\sqrt{a}$, вынесемъ его за скобки изъ всѣхъ членовъ, гдѣ онъ встрѣчается: $\sqrt{a}(1+\sqrt{b}+\sqrt{c})+\sqrt{bc}$. Теперь очевидно, что для уничтоженія $\sqrt{a}$ достаточно умножить знаменателя (а слѣд., и числителя) на $\sqrt{a}(1+\sqrt{b}+\sqrt{c})-\sqrt{bc}$; тогда въ знаменателѣ получимъ:

$$a(1+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2-bc=a+ab+ac+2a\sqrt{b}+2a\sqrt{c}+2a\sqrt{bc}-bc.$$

Желая теперь освободиться отъ $\sqrt{b}$, представимъ знаменателя въ видѣ двучлена:

$$\sqrt{b}(2a+2a\sqrt{c})+(a+ab+ac-bc+2a\sqrt{c})$$

и умножимъ числителя и знаменателя дроби на разность этихъ членовъ; тогда въ знаменателѣ получимъ:

$$b(2a+2a\sqrt{c})^2-(a+ab+ac-bc+2a\sqrt{c})^2.$$

Раскрывъ скобки и поступая съ $\sqrt{c}$ совершенно такъ же, освободимся и отъ него.

7) Если знаменатель имѣетъ видъ: $\sqrt[3]{a} \mp b$, или $a \mp \sqrt[3]{b}$, или $\sqrt[3]{a} \mp \sqrt[3]{b}$, то мы можемъ сдѣлать его раціональнымъ, основываясь на тождествахъ (§ 87, VI):

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$$
$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3.$$

Пусть, напр., дана дробь $\frac{m}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$. Обозначивъ для краткости $\sqrt[3]{a}$ черезъ x и $\sqrt[3]{b}$ черезъ y, умножимъ числителя и знаменателя на x^2+xy+y^2:

$$\frac{m}{x-y}=\frac{m(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}=\frac{mx^2+mxy+my^2}{x^3-y^3}.$$

Но $x^3=a$ и $y^3=b$; слѣд.:

$$\frac{m}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{m\sqrt[3]{a^2}+m\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+m\sqrt[3]{b^2}}{a-b}=\frac{m\sqrt[3]{a^2}+m\sqrt[3]{ab}+m\sqrt[3]{b^2}}{a-b}.$$

8. Вообще, когда знаменатель дроби есть биномъ, представляющій сумму или разность двухъ радикаловъ какой угодно степени, то его можно сдѣлать раціональнымъ, основываясь на тождествѣ (§ 86):

$$(x-y)\ (x^{n-1}+yx^{n-2}+y^2x^{n-3}+\ .\ .\ .\ +y^{n-1})=x^n-y^n.$$

Пусть, напр., знаменатель имѣетъ видъ:

$$\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}=x-y, \text{ гдѣ } x=\sqrt[n]{a},\ y=\sqrt[n]{b},$$

Умноживъ числителя и знаменателя на

$$x^{n-1}+yx^{n-2}+y^2x^{n-3}+\ .\ .\ .\ +y^{n-1},$$

получимъ въ знаменателѣ $x^n-y^n=a-b$.

Если знаменатель есть $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$, то, представивъ его въ видѣ:

$$\sqrt[n]{a}-(-\sqrt[n]{b})=x-y, \text{ гдѣ } x=\sqrt[n]{a},\ y=-\sqrt[n]{b},$$

сведемъ этотъ случай на предыдущій.

Подобнымъ же образомъ поступаемъ, когда знаменатель имѣетъ видъ $m\mp\sqrt{b}$.

Если знаменатель есть биномъ $\sqrt[n]{a} \mp \sqrt[m]{b}$, то можно предварительно привести эти радикалы къ одинаковымъ показателямъ:

$$\sqrt[n]{a} \mp \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m} \mp \sqrt[nm]{b^n}$$

и потомъ поступать по предыдущему. Напр.:

$$\frac{M}{\sqrt[3]{a}-\sqrt{b}} = \frac{M}{\sqrt[6]{a^2}-\sqrt[6]{b^3}} =$$

$$= \frac{M[(\sqrt[6]{a^2})^5+\sqrt[6]{b^3}(\sqrt[6]{a^2})^4+ba+(\sqrt[6]{b^3})^3(\sqrt[6]{a^2})^2+(\sqrt[6]{b^3})\sqrt[6]{a^2}+(\sqrt[6]{b^3})^5]}{a^2-b^3} =$$

$$= M(a\sqrt[3]{a^2}+a\sqrt{b}\sqrt[3]{a}+ba+b\sqrt[3]{a^2}\sqrt{b}+b^2\sqrt[3]{a}+b^2\sqrt{b}) : (a^2-b^3).$$

Примѣры.

1) $$\frac{\sqrt{2}-\frac{1}{3}\sqrt{6}}{2\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{2}-\frac{1}{3}\sqrt{6})(2\sqrt{2}-\sqrt{6})}{8-6} =$$

$$= \frac{4-\frac{2}{3}\sqrt{12}-\sqrt{12}+2}{2} = 3-\frac{5}{6}\sqrt{12} = 3-\frac{5}{3}\sqrt{3}.$$

2) $$\frac{4\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{2}(2+\sqrt{2}-\sqrt{6})}{(2+\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2} = \frac{8\sqrt{2}+8-4\sqrt{12}}{4+4\sqrt{2}+2-6} =$$

$$= \frac{8\sqrt{2}+8-8\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \frac{16+8\sqrt{2}-8\sqrt{6}}{8} = 2+\sqrt{2}-\sqrt{6};$$

3) $$\frac{1-a}{\sqrt{1-\sqrt{a}}} = \frac{(1-a)\sqrt{1+\sqrt{a}}}{\sqrt{1-\sqrt{a}}\sqrt{1+\sqrt{a}}} = \frac{(1-a)\sqrt{1+\sqrt{a}}}{\sqrt{1-a}} =$$

$$= \sqrt{1-a}\sqrt{1+\sqrt{a}} = \sqrt{(1-a)(1+\sqrt{a})};$$

4) $$\frac{5}{\sqrt[4]{3}-2\sqrt{3}} = \frac{5(\sqrt[4]{3}+2\sqrt{3})}{\sqrt{3}-12} = \frac{5(\sqrt[4]{3}+2\sqrt{3})(\sqrt{3}+12)}{-141}.$$

ОТДѢЛЪ V.

Уравненіе степени выше первой.

ГЛАВА I.

Квадратное уравненіе.

211. Нормальный видъ квадратнаго уравненія. Чтобы судить о степени уравненія, въ немъ надо предварительно сдѣлать слѣдующія преобразованія (§ 115): раскрыть скобки, освободиться отъ знаменателей, перенести всѣ члены, содержащіе неизвѣстное, въ одну часть уравненія и, наконецъ, сдѣлать приведеніе подобныхъ членовъ. Къ этимъ преобразованіямъ мы теперь добавимъ еще одно: если въ уравненіе входятъ радикалы, подкоренныя выраженія которыхъ содержатъ неизвѣстное, то отъ такихъ радикаловъ уравненіе надо освободить (какъ это сдѣлать, будетъ указано впослѣдствіи). Предположимъ, что всѣ эти преобразованія сдѣланы. Если послѣ этого въ уравненіи съ однимъ неизвѣстнымъ x окажется членъ, содержащій x^2, но не будетъ членовъ, содержащихъ x въ болѣе высокой степени, то такое уравненіе наз. уравненіемъ второй степени или **квадратнымъ**.

Въ уравненіи второй степени (а также и въ уравненіяхъ болѣе высокихъ степеней) принято переносить всѣ члены уравненія въ одну лѣвую часть, такъ что первая часть уравненія дѣлается равной нулю; тогда квадратное уравненіе получаетъ слѣдующій видъ, называемый **нормальнымъ**:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Здѣсь буквы a, b и c означаютъ какія-нибудь данныя алгебраическія числа или же алгебраическія выраженія, составленныя изъ данныхъ чиселъ. Числа a, b и c называются **коэффиціентами** квадратнаго уравненія; изъ нихъ c наз. также **свободнымъ членомъ**. Когда ни одинъ изъ этихъ коэффиціентовъ не равенъ нулю, квадратное уравненіе наз. **полнымъ**.

Замѣтимъ, что коэффиціентъ a мы всегда можемъ сдѣлать положительнымъ, перемѣнивъ въ случаѣ надобности передъ всѣми членами уравненія знаки на противоположные.

Примѣръ 1. $\frac{6}{x}+\frac{x}{6}=\frac{5(x+1)}{4}$.

Раскрываемъ скобки: $\frac{6}{x}+\frac{x}{6}=\frac{5x+5}{4}$.

Уничтожаемъ знаменателей: $72+2x^2=15x^2+15x$.

Переносимъ всѣ члены въ лѣвую часть: $72+2x^2-15x^2-15x=0$.

Дѣлаемъ приведеніе: $-13x^2-15x+72=0$.

Перемѣняемъ знаки: $13x^2+15x-72=0$.

Коэффиціенты a, b и c общаго вида квадратнаго уравненія приняли въ этомъ примѣрѣ такія частныя значенія: $a=13$, $b=15$ и $c=-72$.

Примѣръ 2. $\frac{x}{a-b}=\frac{1}{2\sqrt{a}-x}=0$

$$x(2\sqrt{a}-x)-(a-b)=0; \quad 2x\sqrt{a}-x^2-(a-b)=0.$$

$$x^2-2x\sqrt{a}+(a-b)=0.$$

Коэффиціенты общаго вида квадратнаго уравненія здѣсь приняли такія частныя значенія: $a=1$, $b=-2\sqrt{a}$, $c=a-b$.

212. Болѣе простой видъ квадратнаго уравненія. Уравненію $ax^2+bx+c=0$ часто придаютъ болѣе простой видъ, раздѣливъ всѣ его члены на коэффиціентъ при x^2. Обозначивъ для краткости $b/_a$ черезъ p, а $c/_a$ черезъ q, получимъ

$$x^2+px+q=0.$$

Такъ, уравненіе $3x^2-15x+2=0$, по раздѣленіи всѣхъ его членовъ на 3, приметъ видъ: $x^2-5x+{}^2/_3=0$. Здѣсь $p=-5$, $q={}^2/_3$

213. Рѣшеніе неполныхъ квадратныхъ уравненій. Квадратное уравненіе наз. неполнымъ, когда въ немъ нѣтъ члена, содержащаго x въ первой степени, или нѣтъ свободнаго члена, или нѣтъ ни того, ни другого. Значитъ, неполныя квадратныя уравненія могутъ быть только трехъ слѣдующихъ видовъ:

1) $ax^2 + c = 0$ (когда $b = 0$);
2) $ax^2 + bx = 0$ (когда $c = 0$);
3) $ax^2 = 0$ (когда $b = c = 0$).

Разсмотримъ рѣшеніе каждаго изъ нихъ.

I. Изъ уравненія $ax^2 + c = 0$ находимъ слѣдующія равносильныя уравненія:

$$ax^2 = -c \text{ и } x^2 = -\frac{c}{a}.$$

Послѣднее уравненіе требуетъ, чтобы квадратъ неизвѣстнаго равнялся числу $-{}^c/_a$; значитъ, неизвѣстное должно равняться квадратному корню изъ этого числа. Это возможно только тогда, когда выраженіе $-{}^c/_a$ есть число положительное, т.-е. дробь ${}^c/_a$ есть число отрицательное, для чего необходимо, чтобы числа a и c были противоположныхъ знаковъ; если, напр., $c = -8$ и $a = +2$, то

$$-\frac{c}{a} = -\frac{-8}{+2} = -(-4) = +4.$$

Условимся обозначать знакомъ $\sqrt{\ }$ только ариѳметическое значеніе квадратнаго корня и примемъ во вниманіе, что квадратный корень изъ положительнаго числа имѣетъ два значенія (§ 165, III); тогда уравненіе $x^2 = -\frac{c}{a}$ равносильно такому:

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Обозначая одно значеніе корня черезъ x_1, а другое черезъ x_2, мы можемъ послѣднее уравненіе подробнѣе выразить такъ:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}; \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Такимъ образомъ, въ этомъ случаѣ получаются 2 различныхъ рѣшенія квадратнаго уравненія.

Если же буквы c и a означаютъ числа съ одинаковыми знаками, то выраженіе $-{}^{c}/_{a}$ представляетъ собою отрицательное число; тогда уравненіе $ax^2+c=0$ не можетъ быть удовлетворено никакимъ вещественнымъ числомъ; въ этомъ случаѣ говорятъ, что уравненіе имѣетъ два **мнимыхъ корня.**

Примѣръ 1. Рѣшить уравненіе $3x^2-27=0$.

$$3x^2=27;\quad x^2=9;\quad x=\pm\sqrt{9}=\pm3.$$

(подробнѣе: $x_1=3,\quad x_2=-3$).

Примѣръ 2. Рѣшить уравненіе $x^2+25=0$.

$x^2=-25;\quad x=\pm\sqrt{-25}$; корни мнимые.

II. Чтобы рѣшить уравненіе $ax^2+bx=0$, представимъ его такъ: $x(ax+b)=0$. Въ этомъ видѣ лѣвая часть уравненія представляетъ собою произведеніе двухъ сомножителей: x и $ax+b$. Но чтобы произведеніе равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы какой-нибудь изъ сомножителей равнялся нулю; слѣд., разсматриваемое уравненіе удовлетворится, когда положимъ, что $x=0$, или $ax+b=0$. Второе уравненіе даетъ: $x=-{}^{b}/_{a}$. Значитъ, уравненіе $ax^2+bx=0$ имѣетъ два вещественные корня: $x_1=0$ и $x_2=-{}^{b}/_{a}$.

Примѣръ. $2x^2-7y=0$, $x(2x-7)=0$; $x_1=0$; $x_2=\frac{7}{2}$.

III. Наконецъ, квадратное уравненіе $ax^2=0$ имѣетъ (если $a\neq0$) только одно рѣшеніе $x=0$.

214. Рѣшеніе уравненія вида $x^2+px+q=0$. Перенеся свободный членъ въ правую часть, получимъ: $x^2+px=-q$. Двучленъ x^2+px можно разсматривать, какъ выраженіе $x^2+2\cdot{}^{p}/_{2}x$, т.-е. какъ сумму квадрата x съ удвоеннымъ произведеніемъ x на ${}^{p}/_{2}$. Отсюда заключаемъ, что если къ этому двучлену придадимъ число $({}^{p}/_{2})^2$, то получимъ трехчленъ, представляющій собою квадратъ суммы $x+{}^{p}/_{2}$. Замѣтивъ это, приложимъ къ обѣимъ частямъ уравненія по $({}^{p}/_{2})^2$; тогда получимъ такое равносильное уравненіе:

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=-q+\left(\frac{p}{2}\right)^2 \text{ или } \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q.$$

Послѣднее уравненіе требуетъ, чтобы квадратъ числа $x+{}^{p}/_{2}$ равнялся $({}^{p}/_{2})^2-q$; это значитъ, что первое число есть корень квадратный изъ второго. Обозначая попрежнему знакомъ $\sqrt{\;}$ только ариѳметическое значеніе квадратнаго корня и принявъ во вниманіе, что квадратный корень имѣетъ два значенія, отличающіяся знаками, мы можемъ написать:

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

и, слѣдов.:

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},$$

или подробнѣе:

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},\quad x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Никакого третьяго значенія x имѣть не можетъ, такъ какъ сумма $x+{}^{p}/_{2}$, будучи такимъ числомъ, квадратъ котораго долженъ равняться числу $({}^{p}/_{2})^2-q$, можетъ имѣть только 2 указанныхъ значенія.

Полученныя 2 формулы для неизвѣстнаго x мы можемъ высказать такъ:

неизвѣстное квадратнаго уравненія, у котораго коэффиціентъ при x^2 есть 1, равно половинѣ коэффиціента при неизвѣстномъ въ 1-й степени съ противоположнымъ знакомъ, плюсъ, минусъ корень квадратный изъ квадрата этой половины безъ свободнаго члена.

Замѣчаніе. Если p есть число отрицательное, то выраженіе $-{}^{p}/_{2}$ должно быть числомъ положительнымъ; точно такъ же если q число отрицательное, то $-q$ число положительное.

Примѣры. 1) $x^2-7x+10=0$; здѣсь $p=-7$, $q=+10$

поэтому: $$x=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2-10}=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{7}{2}\pm\frac{3}{2}.$$

Слѣдовательно: $x_1=\frac{7}{2}+\frac{3}{2}=5$, $x_2=\frac{7}{2}-\frac{3}{2}=2$.

Повѣрка: $5^2 - 7.5 + 10 = 0$; $2^2 -$.

3) $x^2 - x - 6 = 0$; здѣсь $p = -1$, $q = -6$, поэтому.

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2};$$

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2.$$

Повѣрка: $3^2 - 3 - 6 = 0$; $(-2)^2 - (-2) - 6 = 0$.

3) $x^2 - 2x + 5 = 0$; $x = 1 \pm \sqrt{1 - 5} = 1 \pm \sqrt{-4}$. Корни мнимые.

4) $x^2 - 18x + 81 = 0$; $x = 9 \pm \sqrt{81 - 81} = 9$. Уравненіе имѣетъ только одинъ корень.

215. Рѣшеніе уравненія вида $ax^2 + bx + c = 0$. Раздѣливъ всѣ члены этого уравненія на a, получимъ:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Примѣнимъ къ этому виду уравненія формулу, выведенную раньше для уравненія $x^2 + px + q = 0$, и упростимъ ее:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} =$$

$$= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

т.-е. неизвѣстное квадратнаго уравненія равно дроби, у которой числитель есть коэффиціентъ при неизвѣстномъ въ первой степени съ противоположнымъ знакомъ, плюсъ, минусъ корень квадратный изъ квадрата того же коэффиціента безъ учетвереннаго произведенія коэффиціента при неизвѣстномъ во второй степени на свободный членъ, а знаменатель есть удвоенный коэффиціентъ при неизвѣстномъ во второй степени.

Замѣчаніе. Выведенная формула представляетъ собою общее рѣшеніе квадратнаго уравненія, потому что изъ нея можно получить какъ рѣшеніе упрощеннаго полнаго уравненія $x^2 + px + q = 0$ (полагая $a = 1$), такъ и рѣшеніе неполныхъ квадратныхъ уравненій (полагая $b = 0$ или $c = 0$).

Примѣры.

1) $3x^2-7x+4=0$; здѣсь $a=3$, $b=-7$, $c=4$.

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4.3.4}}{2.3}=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{6}=\frac{7\pm\sqrt{1}}{6}.$$

$$x_1=\frac{8}{6}=\frac{4}{3},\quad x_1=1.$$

2) $2x^2-3x+10=0$; здѣсь $a=2$, $b=-3$, $c=10$.

$$x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4.2.10}}{2.2}=\frac{3\pm\sqrt{-71}}{4};$$

$$x_1=\frac{3+\sqrt{-71}}{4},\quad x_2=\frac{3-\sqrt{-71}}{4}.$$

Оба корня оказываются мнимыми.

216. Упрощеніе общей формулы, когда коэффиціентъ b есть четное число. Пусть $b=2k$, то-есть уравненіе имѣетъ видъ:

$$ax^2+2kx+c=0.$$

Примѣняя общую формулу, получимъ:

$$x=\frac{-2k\pm\sqrt{4k^2-4ac}}{2a}=\frac{-2k\pm\sqrt{4(k^2-ac)}}{2a};$$

$$x=\frac{-2k\pm2\sqrt{k^2-ac}}{2a}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}.$$

Эту сокращенную формулу полезно также запомнить.

Примѣры.

1) $5x^2-8x-2=0$; здѣсь $a=5$, $b=-8=-2.4$, $c=-2$

Примѣняя сокращенную формулу, получаемъ:

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16+10}}{5}=\frac{4\pm\sqrt{26}}{5}.$$

$\sqrt{26}=5,09$ (до $\frac{1}{100}$); $x_1=\frac{9,09}{5}=18,18$; $x_2=\frac{-1,09}{5}=-0,218$

2) $(a^2-b^2)x^2-2(2a^2-b^2)x+4a^2-b^2=0$.

По сокращенной формулѣ находимъ:

$$x = \frac{2a^2 - b^2 \pm \sqrt{(2a^2 - b^2)^2 - (a^2 - b^2)(4a^2 - b^2)}}{a^2 - b^2}.$$

Подк. величина $= 4a^4 - 4a^2b^2 + b^4 - 4a^4 + 4a^2b^2 + a^2b^2 - b^4 = a^2b^2$.

$$x_1 = \frac{2a^2 - b^2 + ab}{a^2 - b^2}, \quad x_2 = \frac{2a^2 - b^2 - ab}{a^2 - b^2},$$

$$x_1 = \frac{a^2 - b^2 + a^2 + ab}{a^2 - b^2} = \frac{(a+b)(a-b) + a(a+b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{2a-b}{a-b},$$

$$x_2 = \frac{a^2 - b^2 + a^2 - ab}{a^2 - b^2} = \frac{(a+b)(a-b) + a(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{2a+b}{a+b}.$$

217. Число корней квадратнаго уравненія. Разсматривая рѣшеніе квадратныхъ уравненій, мы видимъ, что эти уравненія иногда имѣютъ два корня, иногда одинъ, иногда ни одного (случай мнимыхъ корней). Однако согласились приписывать квадратнымъ уравненіямъ во всѣхъ случаяхъ два корня, разумѣя при этомъ, что корни могутъ быть иногда равными, иногда мнимыми. Причина такого соглашенія состоитъ въ томъ, что формулы, выражающія мнимые корни уравненія, обладаютъ тѣми же свойствами, какія принадлежатъ вещественнымъ корнямъ, стоитъ только, совершая дѣйствія надъ мнимыми числами, руководиться правилами, выведенными для вещественныхъ чиселъ, принимая притомъ, что $(\sqrt{-a})^2 = -a$. Точно такъ же, когда уравненіе имѣетъ одинъ корень, мы можемъ, разсматривая этотъ корень, какъ два одинаковыхъ, приписать имъ тѣ же свойства, какія принадлежатъ разнымъ корнямъ уравненія. Простѣйшія изъ этихъ свойствъ выражаются въ слѣдующей теоремѣ.

218. Теорема. Если α и β суть корни уравненія $x^2 + px + q = 0$, то

$$\alpha + \beta = -p \text{ и } \alpha\beta = q;$$

т. е. сумма корней квадратнаго уравненія, у котораго коэффиціентъ при x^2 есть 1, равна коэффиціенту при неизвѣстномъ въ первой

степени, взятому съ противоположнымъ знакомъ, а произведеніе корней этого уравненія равно его свободному члену.

Док. Каковы бы ни были корни α и β, они опредѣляются формулами:

$$\alpha = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad \beta = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

$$\text{Слѣд.: } \alpha + \beta = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = -p$$

$$\text{и } \alpha\beta = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right).$$

Это произведеніе можно найти сокращеннымъ путемъ, основываясь на тождествѣ: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$;

$$\alpha\beta = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = q.$$

Замѣчаніе. Если α и β суть корни ур-нія $ax^2 + bx + c = 0$, или, что то же, уравненія $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, то

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}; \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

Слѣдствіе. Не рѣшая квадратнаго уравненія, мы можемъ опредѣлить знаки его корней, если эти корни вещественные. Пусть, напр., имѣемъ уравненіе $x^2 + 8x + 12 = 0$. Такъ какъ въ этомъ примѣрѣ выраженіе $(^p/_2)^2 - q$ даетъ положительное число, то оба корня должны быть вещественные. Опредѣлимъ, не рѣшая уравненія, знаки этихъ корней. Для этого разсуждаемъ такъ: обращая вниманіе сначала на свободный членъ $(+12)$ видимъ, что онъ имѣетъ знакъ $+$; значитъ, произведеніе корней должно быть положительнымъ, т.-е. оба корня имѣютъ одинаковые знаки. Чтобы опредѣлить, какіе именно, обратимъ вниманіе на коэффиціентъ при x (т.-е. на $+8$); онъ имѣетъ знакъ $+$; слѣд., сумма коэффиціентовъ отрицательна; поэтому одинаковые знаки у корней должны быть минусы.

Подобными разсужденіями не трудно опредѣлить знаки корней и во всякомъ другомъ случаѣ. Такъ, ур-ніе $x^2+8x-12=0$ имѣютъ корни съ разными знаками (потому что ихъ произведеніе отрицательно), при чемъ отрицательный корень имѣетъ бо́льшую абсолютную величину (потому что ихъ сумма отрицательна); уравненіе $x^2-8x-12=0$ имѣетъ тоже корни съ разными знаками, но бо́льшая абсолютная величина принадлежитъ положительному корню.

219. Обратная теорема. **Если между 4 числами: α, β, p и q существуютъ такія двѣ зависимости: $p=-(\alpha+\beta)$ и $q=\alpha\beta$, то числа α и β суть корни уравненія $x^2+px+q=0$.**

Док. Требуется доказать, что каждое изъ чиселъ α и β, при данныхъ въ теоремѣ условіяхъ, удовлетворяетъ уравненію $x^2+px+q=0$. Для этого подставимъ въ него на мѣсто p выраженіе $-(\alpha+\beta)$ и на мѣсто q произведеніе $\alpha\beta$:

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0.$$

Преобразуя это уравненіе, послѣдовательно получаемъ:

$$x^2-\alpha x-\beta x+\alpha\beta=0;\quad x(x-\alpha)-\beta(x-\alpha)=0;$$
$$(x-\alpha)(x-\beta)=0.$$

Если въ послѣднее уравненіе на мѣсто x подставимъ число α или число β, то замѣтимъ, что числа эти обращаютъ уравненіе въ тождество:

$$0.(\alpha-\beta)=0 \quad \text{и} \quad (\beta-\alpha).0=0.$$

Слѣд., α и β суть корни уравненія $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ и, значитъ, также и корни равносильнаго уравненія $x^2+px+q=0$.

Слѣдствіе. По даннымъ корнямъ можно составить квадратное уравненіе. Пусть требуется составить уравненіе, котораго корни были бы 2 и -3. Положивъ, что $p=-[2+(-3)]$ и $q=2\,.\,-(3)$, находимъ $p=1$, $q=-6$. Значитъ, искомое уравненіе будетъ:

$$x^2+x-6=0.$$

Подобно этому найдемъ, что числа -2 и -2 суть корни уравненія $x^2+4x+4=0$, числа 3 и 0—корни уравненія $x^2-3x=0$, и т. п.

220. Трехчленъ второй степени. Разложеніе его на множителей. Выраженіе ax^2+bx+c, въ которомъ x означаетъ произвольное число (перемѣнное), а a, b и c— какія-нибудь данныя (постоянныя) числа, назыв. **трехчленомъ 2-й степени.** Различіе между трехчленомъ 2-й степени и лѣвою частью уравненія $ax^2+bx+c=0$ состоитъ въ томъ, что въ трехчленѣ буква x означаетъ какое угодно число, тогда какъ въ уравненіи она означаетъ только тѣ числа, которыя удовлетворяютъ уравненію. Значенія x, обращающія трехчленъ въ 0, наз. его **корнями**; эти корни вмѣстѣ съ тѣмъ и корни уравненія $ax^2+bx+c=0$. Найдя ихъ, мы легко можемъ разложить трехчленъ на множителей первой степени относительно x. Дѣйствительно, пусть эти корни будутъ α и β. Такъ какъ эти числа представляютъ собою корни уравненія $ax^2+bx+c=0$, то, по свойству корней квадратнаго уравненія, будемъ имѣть:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \text{ и } \alpha\beta=\frac{c}{a}; \text{ откуда: } \frac{b}{a}=-(\alpha+\beta) \text{ и } \frac{c}{a}=\alpha\beta;$$

поэтому:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=x^2-\alpha x-\beta x+\alpha\beta=$$
$$=x(x-\alpha)-\beta(x-\alpha)=(x-\alpha)(x-\beta).$$

Умноживъ обѣ части равенства на a, получимъ:

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

Такимъ образомъ, трехчленъ ax^2+bx+c разлагается на три множителя, изъ которыхъ первый равенъ коэффиціенту при x^2, а два другіе суть двучлены 1-й степени относительно x, именно: разность между x и однимъ корнемъ трехчлена и разность между x и другимъ его корнемъ.

Трехчленъ x^2+px+q, у котораго коэффиціентъ при x^2 есть 1, разлагается на 2 множителя первой степени относительно x:

$$x^2+px+q=(x-\alpha)(x-\beta).$$

Слѣдствіе. По даннымъ корнямъ квадратнаго уравненія можно составить это уравненіе (иначе, чѣмъ это было указано въ

концѣ § 210); напр., уравненіе, имѣющее корни 4 и 5, есть $(x-5)(x-4)=0$; раскрывъ скобки и сдѣлавъ приведеніе подобныхъ членовъ, получимъ $x^2-9x+20=0$. Уравненіе, имѣющее корни -2 и -1, есть: $[x-(-2)][x-(-1)]=0$, т. е. $(x+2)(x+1)=0$ или $x^2+3x+2=0$.

Примѣръ 1. Разложить на множителей трехчленъ

$$2x^2-2x-12.$$

Рѣшивъ уравненіе: $2x^2-2x-12=0$, мы найдемъ корни даннаго трехчлена; это будутъ 3 и -2. Теперь выполнимъ разложеніе:

$$2x^2-2x-12=2(x-3)[x-(-2)]=2(x-3)(x+2).$$

Примѣръ 2. Разложить на множителей трехчленъ

$$3x^2+x+1.$$

Корни трехчлена суть: $\frac{-1+\sqrt{-11}}{6}$ и $\frac{-1-\sqrt{-11}}{6}$;

Поэтому: $3x^2+x+1=3\left(x-\frac{-1+\sqrt{-11}}{6}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{-11}}{6}\right)=$

$$=3\left(\frac{6x+1-\sqrt{-11}}{6}\right)\left(\frac{6x+1+\sqrt{-11}}{6}\right)=$$

$$=\tfrac{1}{12}(6x+1-\sqrt{-11})(6x+1+\sqrt{-11}).$$

Примѣръ 3. Разложить $6abx^2-(3b^3+2a^3)x+a^2b^2$.

Корни этого трехчлена будутъ: $x_1=\frac{b^2}{2a}$, $x_2=\frac{a^2}{3b}$.

Поэтому: $6abx^2-(3b^3+2a^3)x+a^2b^2=6ab\left(x-\frac{b^2}{2a}\right)\left(x-\frac{a^2}{3b}\right)=$

$$=6ab\left(\frac{2ax-b^2}{2a}\right)\left(\frac{3bx-a^2}{3b}\right)=(2ax-b^2)(3bx-a^2).$$

Примѣръ 4. Разложить $(a^2-1)(b^2+1)-2b(a^2+1)$.

Замѣтивъ, что данное выраженіе есть трехчленъ 2-й степени относительно буквы b, расположимъ его по степенямъ этой буквы:

$$(a^2-1)b^2-2(a^2+1)b+(a^2-1).$$

Корни этого трехчлена будутъ (§ 216):

$$b_1=\frac{a^2+1+\sqrt{(a^2+1)^2-(a^2-1)^2}}{a^2-1}=\frac{a^2+1+2a}{a^2-1}=\frac{a+1}{a-1},$$

$$b_{11}=\frac{a^2+1-\sqrt{(a^2+1)^2-(a^2-1)^2}}{a^2-1}=\frac{a^2+1-2a}{a^2-1}=\frac{a-1}{a+1}.$$

Итакъ, данный трехчленъ представится такъ:

$$(a^2-1)\left(b-\frac{a+1}{a-1}\right)\left(b-\frac{a-1}{a+1}\right)=[b(a-1)-(a+1)][b(a+1)-(a-1)]=$$
$$=(ab-b-a-1)(ab+b-a+1).$$

Примѣръ 5. Найти значеніе x, выражаемое дробью:

$$x=\frac{2a^2-2a-12}{3a^2+a-10}$$

при $a=-2$ (см. § 146).

Подставивъ на мѣсто a число -2, находимъ, что дробь принимаетъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$. Для избѣжанія этой неопредѣленности разложимъ числителя и знаменателя на множителей. Такъ какъ корни числителя суть 3 и -2, а корни знаменателя $^5/_3$ и -2, то дробь представится такъ:

$$x=\frac{2(a-3)(a+2)}{3(a-\frac{5}{3})(a+2)}.$$

Мы видимъ теперь, что числитель и знаменатель нашей дроби имѣютъ общаго множителя $a+2$. Множитель этотъ при всѣхъ значеніяхъ a, не равныхъ -2, не равенъ нулю; поэтому при всѣхъ такихъ значеніяхъ a дробь можно сократить на $a+2$:

$$x=\frac{2(a-3)}{3(a-\frac{5}{3})}=\frac{2a-6}{3a-5}.$$

Если по условіямъ вопроса, при рѣшеніи котораго получилась данная дробь, возможно допустить, что величина x и

при $a = -2$ выражается тою же сокращенною дробью, какою она выражается при $a \neq -2$ [1]), то тогда найдемъ:

$$x = \frac{2(-2)-6}{3(-2)-5} = \frac{-10}{-11} = \frac{10}{11}.$$

ГЛАВА II.

Нѣкоторые частные случаи квадратнаго уравненія.

221. Случай, когда коэффиціентъ a очень малъ. Вычисленіе корней ур. $ax^2 + bx + c = 0$ по общей формулѣ затруднительно въ томъ случаѣ, когда коэффиціентъ a очень малое число сравнительно съ b и c. Въ самомъ дѣлѣ, вычисляя корни по формулѣ:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

мы въ большинствѣ случаевъ должны довольствоваться приближенной величиной $\sqrt{b^2 - 4ac}$, а слѣд., и всего числителя. Раздѣливъ эту приближенную величину на $2a$, мы тѣмъ самымъ раздѣлимъ на $2a$ и погрѣшность, съ которой вычисленъ числитель формулы. Но такъ какъ, по предположенію, $2a$ очень малая дробь, а дѣленіе на малую дробь равносильно умноженію на большое число, то погрѣшность значительно возрастетъ, вслѣдствіе чего окончательный результатъ будетъ далекъ отъ истиннаго. Если, напримѣръ, $2a = 0{,}00001$, и мы вычислили $\sqrt{b^2 - 4ac}$ до четвертаго десятичнаго знака, то предѣлъ погрѣшности въ окончательномъ результатѣ будетъ $0{,}0001 : 0{,}00001 = 10$.

Для вычисленія корней уравненія въ этомъ случаѣ употребляется болѣе удобный способъ такъ называемаго **послѣдовательнаго приближенія**.

Замѣтимъ, что при очень малой величинѣ a одинъ изъ корней уравненія немного отличается отъ $-\frac{c}{b}$, а другой — весьма большое число (по абсолютной своей величинѣ). Дѣйствительно, уравненіе $ax^2 + bx + c = 0$ равносильно такому уравненію

$$\frac{ax^2 + bx + c}{x^2} = 0,$$

[1]) Если, напр., извѣстно, что значеніе величины x при $a = -2$ должно служить *предѣломъ* тѣхъ значеній, которыя x получаетъ, когда a стремится къ равенству съ -2.

которому можно придать видъ:

$$\frac{1}{x}\left(b+\frac{c}{x}\right)=-a.$$

Такъ какъ $-a$ близко къ нулю, то послѣднее уравненіе можетъ быть удовлетворено такими значеніями x, при которыхъ одинъ изъ сомножителей лѣвой части уравненія окажется очень малымъ числомъ, а другой — не очень большимъ; это будетъ имѣть мѣсто или тогда, когда придадимъ x весьма большое абсолютное значеніе, или же тогда, когда x будетъ близокъ къ $-{}^c/_b$.

Покажемъ, какъ вычислить тотъ изъ корней, который мало отличается отъ $-{}^c/_b$ (другой корень найдемъ, вычитая первый изъ $-{}^b/_a$).

Изъ уравненія выводимъ:

$$x=-\frac{c}{b}-\frac{ax^2}{b}. \qquad (1)$$

Такъ какъ a — очень малое число, а x и b не очень велики и не очень малы, то абсолютная величина дроби ${}^{ax^2}/_b$ очень мала. Пренебрегая этимъ членомъ, получимъ для x первое приближеніе:

$$x=-\frac{c}{b}.$$

Вставивъ это значеніе въ правую часть ур. (1), получимъ второе приближеніе, болѣе точное, чѣмъ первое:

$$x=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^2}.$$

Вставивъ эту величину въ правую часть ур. (1), получимъ третье приближеніе, еще болѣе точное. Подобнымъ же путемъ можемъ получить, если нужно, четвертое и слѣдующія приближенія.

Примѣры. 1) Рѣшить уравненіе $0{,}003x^2+5x-2=0$.

$$x=\frac{2}{5}-\frac{0{,}003x^2}{5}=0{,}4-0{,}0006x^2.$$

Первое приближеніе $=0{,}4$. Это число болѣе истиннаго значенія x, потому что намъ пришлось отбросить отрицательный членъ $-0{,}0006x^2$.

Второе приближеніе $=0{,}4-0{,}0006\cdot(0{,}4)^2=0.399904$. Это число менѣе истиннаго значенія x, потому что для полученія его мы подставили вмѣсто x^2 число, бо́льшее a^2, отчего вычитаемое увеличилось, а разность уменьшилась.

Третье приближеніе $=0{,}4-0{,}0006\cdot(0{,}399904)^2=0{,}399904046\ldots$; оно должно быть больше истиннаго значенія, такъ какъ для полученія его мы подставили на мѣсто x^2 число, меньше x^2, отчего вычитаемое уменьшилось, а разность увеличилась. Четвертое приближеніе оказалось бы меньше истиннаго значенія и т. д.

Такимъ образомъ,
$$0{,}4>x>0{,}399904$$
$$0{,}399904<x<0{,}399904046\ldots$$

Отсюда видно, что, взявъ вмѣсто x первое приближеніе 0,4, сдѣлаемъ ошибку менѣе разности 0,4—0,399004, т.-е. менѣе 0,0001. Взявъ вмѣсто x второе приближеніе 0,399004, сдѣлаемъ ошибку менѣе разности 0,3990040401... — 0,399004, т.-е. менѣе 1-й десятимилліонной. Такимъ образомъ, послѣдовательныя приближенія оказываются все болѣе и болѣе точными.

Другой корень получается вычитаніемъ найденнаго корня изъ $\frac{-5}{0,003} = -1666,(6)$. Если для перваго корня возьмемъ число 0,4, то другой $= -1667,(6)$.

2) Рѣшить уравненіе $0,007x^2 - x + 2 = 0$.

$$x = 2 + 0,007x^2.$$

Первое приближеніе $= 2$ (съ недостаткомъ).

Второе приближеніе $= 2 + 0,007 \cdot 2^2 = 2,028$ (съ недостаткомъ).

Третье приближеніе $= 2,028789488$ (съ недост.). Такъ какъ эти приближенія всѣ съ недостаткомъ и идутъ увеличиваясь, то, значитъ, они все болѣе и болѣе приближаются къ точной величинѣ x.

Сравнивая второе приближеніе съ третьимъ, видимъ, что у нихъ первые три десятичные знака одинаковы; отсюда заключаемъ, что, положивъ $x = 2,028$, сдѣлаемъ ошибку менѣе 0,001.

222. Случай, когда c очень малое число. Способъ послѣдовательнаго приближенія примѣнимъ и тогда, когда свободный членъ уравненія очень малое число сравнительно съ a и b. Въ этомъ случаѣ одинъ изъ корней близокъ къ $-b/a$, а другой—весьма малое число. Въ этомъ нетрудно убѣдиться, если уравненію придать такой видъ:

$$x(ax + b) = -c.$$

Такъ какъ, по предположенію, абсолютная величина $-c$ очень мала, то уравненіе, очевидно, удовлетворится при x, или очень близкомъ къ 0, или мало отличающемся отъ $-b/a$.

Чтобы найти корень, имѣющій очень малую величину, представимъ уравненіе снова въ видѣ:

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ax^2}{b}. \tag{1}$$

Такъ какъ a и b суть числа не очень большія и не очень малыя, а абсолютная величина x^2 очень мала, то для перваго приближенія можно пренебречь членомъ ax^2/b; тогда получимъ:

$$x = -\frac{c}{b}.$$

Вставивъ это значеніе на мѣсто x въ правую часть уравненія (1), получимъ второе приближеніе; подобнымъ же образомъ найдемъ, если нужно, и слѣдующія приближенія.

Примѣръ. Рѣшить уравненіе $2x^2 + x - 0,003 = 0$.

$$x = 0,0003 - 2x^2.$$

Первое приближеніе $= 0,0003$ (съ избыткомъ).

Второе приближеніе $= 0,0003 - 2.(0,0003)^2 = 0,002982$ (съ недостаткомъ).

Третье приближеніе $0,002082215352$ (съ избыткомъ).

Положивъ $x = 0,002082$, сдѣлаемъ ошибку менѣе одной милліонной. Другой корень уравненія $= -0,5 - 0,002082 = -0,502982$.

ГЛАВА III.

Изслѣдованіе квадратнаго уравненія.

223. Когда корни бываютъ вещественные и когда они мнимые. Разсмотримъ, какія рѣшенія получаются изъ формулъ:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

при различныхъ частныхъ значеніяхъ коэффиціентовъ a, b и c.

Характеръ этихъ рѣшеній зависитъ отъ подкоренного выраженія $b^2 - 4ac$. Дѣйствительно, изъ формулъ видно, что:

1) если $b^2 - 4ac > 0$, то оба корня вещественные и неравные;

2) если $b^2 - 4ac = 0$, то корни вещественные и равные;

и 3) если $b^2 - 4ac < 0$, то оба корня мнимые.

Полезно замѣтить, что когда числа a и c — противоположныхъ знаковъ, то произведеніе ac представляетъ собою отрицательное число и, слѣд., выраженіе $-4ac$ есть тогда число положительное; такъ какъ, кромѣ того, при всякомъ численномъ значеніи коэффиціента b, не равномъ нулю, число b^2 всегда положительно, то выраженіе $b^2 - ac$ дастъ въ этомъ случаѣ положительное число, и поэтому оба корня должны быть вещественные неравные. Напр., мы можемъ утверждать заранѣе (à priori), что ур. $3x^2 + 2x - 8 = 0$ имѣетъ вещественные неравные корни, такъ какъ первый и третій его коэффиціенты имѣютъ противоположные знаки (корни этого уравненія суть $4/3$ и -2).

Вещественные корни квадратнаго уравненія могутъ быть оба положительные, или оба отрицательные, или одинъ положи-

тельный, а другой отрицательный. О значеніи этихъ рѣшеній здѣсь можетъ быть сказано то же самое, что говорилось раньше при изслѣдованіи уравненія первой степени.

Мнимые корни, конечно, означаютъ невозможность задачи, изъ условій которой выведено квадратное уравненіе.

224. Значеніе общихъ формулъ при $a=0$. При выводѣ общей формулы для корней уравненія $ax^2+bc+c=0$ мы приводили его къ виду $x^2+px+q=0$, для чего намъ нужно было раздѣлить всѣ члены уравненія на a. Но дѣленіе на a возможно лишь въ томъ случаѣ, когда a не равно 0. Слѣд., формулы:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_{11}=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

выведены въ предположеніи, что коэффиціентъ a не равенъ 0, и потому, конечно, нельзя заранѣе требовать, чтобы онѣ давали вѣрные результаты и при $a=0$. Однако посмотримъ, во что онѣ обратятся при этомъ предположеніи. Подставивъ въ нихъ на мѣсто a нуль, получимъ:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2}}{0},\quad x_{11}=\frac{-b-\sqrt{b^2}}{0}.$$

Такъ какъ знакомъ $\sqrt{\ }$ мы условились обозначать только ариѳметическое значеніе корня, то $\sqrt{b^2}=b$ въ томъ случаѣ, когда b число положительное и $\sqrt{b^2}=-b$, когда b число отрицательное (напр., если $b=-5$, то $\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=5=-(-5)$) Поэтому:

при $a=0$ и при b положительномъ
$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-b+b}{0}=\dfrac{0}{0}, \\ x_{11}=\dfrac{-b-b}{0}=\dfrac{-2b}{0}=\infty. \end{cases}$$

при $a=0$ и при b отрицательномъ
$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-b-b}{0}=\dfrac{-2b}{0}=\infty; \\ x_{11}=\dfrac{-b+b}{0}=\dfrac{0}{0}. \end{cases}$$

Значитъ, при $a=0$ общая формула даетъ для одного изъ корней неопредѣленное выраженіе $^0/_0$, а для другого — выраженіе ∞. Между тѣмъ, когда $a=0$, квадратное уравненіе обращается въ уравненіе 1-й степени: $bx+c=0$, дающее для x только одно значеніе: $x=-{}^c/_b$. Мы видимъ такимъ образомъ, что общія формулы не даютъ правильнаго рѣшенія для случая, когда $a=0$.

225. Поставимъ теперь такой вопросъ: если коэффиціентъ a не равенъ 0, а только приближается къ 0 какъ угодно близко, то къ чему будутъ приближаться (къ какому предѣлу) величины корней квадр. уравненія? Пока $a\neq0$, мы имѣемъ право примѣнять наши общія формулы. Изъ нихъ усматриваемъ, что, когда a приближается къ 0, одинъ изъ корней долженъ увеличиваться (по абсолютной величинѣ) безгранично, а именно это будетъ x_{11} при $b>0$ и x_1 при $b<0$. Дѣйствительно, по мѣрѣ приближенія a къ 0 величина радикала $\sqrt{b^2-4ac}$ будетъ все болѣе и болѣе приближаться къ $\sqrt{b^2}$, т.-е. къ b, если это число положительно, и къ $-b$, если b число отрицательное; слѣд., числитель дроби, выведенной для x_{11} въ первомъ случаѣ, или для x_1 во второмъ случаѣ, будетъ стремиться къ $-2b$, тогда какъ знаменатель ея безпредѣльно уменьшается; при этихъ условіяхъ величина дроби должна безпредѣльно возрастать.

Что же касается другого корня (т.-е. x_1 при $b>0$, или x_{11} при $b<0$), то изъ общихъ формулъ мы прямо не усматриваемъ, къ чему стремится этотъ корень, когда a приближается къ 0; не усматриваемъ потому, что въ дроби, опредѣляющей этотъ другой корень, и числитель и знаменатель оба приближаются къ 0, и потому о величинѣ самой дроби мы не можемъ ничего сказать опредѣленнаго. Попробуемъ преобразовать общія формулы такимъ образомъ, чтобы буква a не входила за разъ и въ числителя, и въ знаменателя дроби, а только въ одинъ какой-нибудь изъ этихъ членовъ. Такое преобразованіе возможно выполнить. Для этого стоитъ только дробь, опредѣляющую x_1, освободить отъ радикала въ числителѣ такимъ же пріемомъ, какой былъ

нами указанъ раньше (§ 210) для освобожденія отъ радикаловъ знаменателя дроби:

$$x_1 = \frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})} =$$

$$= \frac{4ac}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})} = \frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Сократить дробь на $2a$ мы имѣли право, такъ какъ число a мы предполагаемъ не равнымъ нулю, а только приближающимся къ нулю.

Подобно этому для x_{11} мы получимъ:

$$x_{11} = \frac{(-b-\sqrt{b^2-4ac})(-b+\sqrt{b^2-4ac})}{2a(-b+\sqrt{b^2-4ac})} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{2a(-b+\sqrt{b^2-4ac})} =$$

$$= \frac{4ac}{2a(-b+\sqrt{b^2-4ac})} = \frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Изъ этихъ формулъ видно, что когда a приближается къ 0, то при $b>0$ величина x_1 и при $b<0$ величина x_{11} приближаются все ближе и ближе къ числу $2c/{-2b}$, т.-е. къ числу $-c/b$. Такимъ образомъ:

если въ уравненіи $ax^2+bx+c=0$ коэффиціентъ a приближается какъ угодно близко къ 0, то абсолютная величина одного изъ корней безпредѣльно увеличивается, а другой корень приближается какъ угодно близко къ числу $-c/b$.

Возьмемъ, напр., уравненіе $0{,}001x^2+8x-5=0$, въ которомъ коэффиціентъ при x^2 очень малъ. Примѣняя сокращенную формулу (§ 216), получимъ:

$$x = \frac{-4\pm\sqrt{16+0{,}005}}{0{,}001} = \frac{-4\pm\sqrt{16{,}005}}{0{,}001} = \frac{-4\pm4{,}000624\ldots}{0{,}001},$$

$$x_1 = \frac{0{,}000624\ldots}{0{,}001} = 0{,}624\ldots;\quad x_{11} = \frac{-8{,}000624\ldots}{0{,}001} = -8000{,}624\ldots$$

Мы видимъ такимъ образомъ, что одинъ корень весьма близокъ къ числу $-c/b$, которое въ этомъ примѣрѣ равно $-(-5/8)$ ...

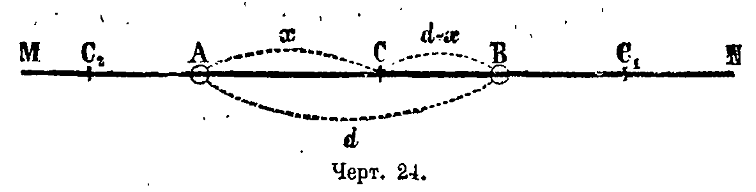
$= + {}^5/_8 = 0,625$; другой же корень имѣетъ очень большую абсолютную величину.

Если въ томъ же уравненіи еще уменьшимъ коэффиціентъ при x^2, напр., возьмемъ уравненіе такое: $0,0001x^2 + 8x - 5 = 0$, то для x_1 получимъ число 0,6249, еще болѣе близкое къ $-{}^5/_8$, а для x_{11} найдемъ число $-80000,6249...$, абсолютная величина котораго еще больше.

226. Задача о двухъ источникахъ свѣта. Чтобы на примѣрѣ указать значеніе различныхъ случаевъ, какіе могутъ представиться при рѣшеніи квадратнаго уравненія, изслѣдуемъ слѣдующую задачу о двухъ источникахъ свѣта:

На прямой MN (черт. 24) въ точкахъ A и B находятся два источника свѣта. На разстояніи одного метра сила свѣта перваго источника равна a свѣчамъ, а сила свѣта второго равна b свѣчамъ. Разстояніе между A и B равно d метрамъ. Найти на прямой MN такую точку, въ которой освѣщеніе отъ обоихъ источниковъ было бы одинаковое.

Искомая точка можетъ находиться: или направо отъ A, или налѣво отъ A, при чемъ въ первомъ случаѣ она можетъ оказаться или между A и B, или за B. Сдѣлаемъ сначала предположеніе, что она находится направо отъ A, между A и B; напр., пусть это будетъ точка C, отстоящая отъ A на x футовъ



Черт. 24.

Изъ физики извѣстно, что степень освѣщенія, при одинаковыхъ прочихъ условіяхъ, обратно пропорціональна квадрату разстоянія отъ источника свѣта, т.-е. если освѣщаемый предметъ удалить отъ источника свѣта на разстояніе, въ 2 раза, 3 раза, 4 раза и т. д. бо́льшее, то степень освѣщенія уменьшится въ 4 раза, въ 9 разъ, въ 16 разъ и т. д. Согласно этому закону, если бы точка C отстояла отъ A только на 1 метръ, то она освѣщалась бы этимъ источникомъ такъ, какъ будто на

нее падали лучи отъ a свѣчей; но такъ какъ она отстоитъ отъ A на x метр., то степень ея освѣщенія этимъ источникомъ будетъ $\frac{a}{x^2}$. Подобнымъ же разсужденіемъ найдемъ, что точка C отстоя отъ источника свѣта B на $d-x$ метр., будетъ освѣщаться имъ съ силою $\frac{b}{(d-x)^2}$. Вопросъ задачи требуетъ, чтобы

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(d-x)^2}. \quad (1$$

Таково будетъ уравненіе, если равноосвѣщенная точка лежитъ между A и B. Допустимъ теперь, что она находится направо отъ B (напр., въ C_1), на разстояніи x отъ A. Тогда, попрежнему, степень освѣщенія ея источникомъ A будетъ $\frac{a}{x_2}$; отъ источника B точка C_1 находится на разстояніи $x-d$ метр., поэтому степень освѣщенія ея этимъ источникомъ выразится $\frac{b}{(x-d)^2}$, и уравненіе будетъ:

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(x-d)^2} \quad (2$$

Сравнивая это уравненіе съ ур. (1), находимъ, что они одинаковы, такъ какъ $(d-x)^2=(x-d)^2$. Замѣтивъ это, можемъ утверждать, что уравненіе (1) включаетъ въ себѣ и этотъ второй случай: если окажется, что уравненію (1) можетъ удовлетворить такое значеніе x, которое больше d (разстояніе между A и B), то это значеніе x и будетъ означать разстояніе отъ A до C.

Теперь сдѣлаемъ третье предположеніе, что искомая точка находится налѣво отъ A; пусть это будетъ точка C_2, отстоящая отъ A на x футовъ. Тогда степень освѣщенія ея источникомъ A равна $\frac{a}{x^2}$, а источникомъ B равна $\frac{b}{(d+x)^2}$; слѣд., для этого случая мы будемъ имѣть уравненіе:

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(d+x)^2}. \quad (3$$

Это уравненіе можно получить изъ ур. (1), если въ послѣднемъ замѣнимъ x на $-x$. Дѣйствительно, сдѣлавъ такую замѣну, получимъ

$$\frac{a}{(-x)^2}=\frac{b}{[d-(-x)]^2}.$$

Но $(-x)^2=x^2$ и $d-(-x)=d+x$; слѣд., получившееся послѣ замѣны уравненіе и есть ур. (3).

Теперь мы можемъ утверждать, что уравненіе (1) соотвѣтствуетъ всѣмъ тремъ предположеніямъ, если только допустимъ, что буква x въ немъ есть алгебраическое число, т.-е. что она можетъ означать и положительное число, и отрицательное (и нуль). Если, рѣшивъ это уравненіе, мы увидимъ, что ему удовлетворяетъ какое-нибудь положительное число, то это число будетъ означать разстояніе искомой точки отъ A направо, при чемъ она можетъ лежать или между A и B, или за B, смотря по тому, будетъ ли это положительное число меньше числа d или больше его; если же уравненію (1) будетъ удовлетворять какое-нибудь отрицательное число, то это будетъ означать, что равноосвѣщенная точка находится налѣво отъ A на разстояніи равномъ абсолютной величинѣ этого отрицательнаго числа. Рѣшимъ теперь уравненіе (1):

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(d-x)^2};\quad a(d-x)^2=bx^2;$$

$$ad^2-2adx+ax^2=bx^2;\quad (a-b)x^2-2adx+ad^2=0.$$

Такъ какъ коэффиціентъ при x дѣлится на 2, то по сокращенной формулѣ (§ 216) находимъ:

$$x=\frac{ad\pm\sqrt{a^2d^2-(a-b)ad^2}}{a-b}=\frac{ad\pm d\sqrt{ab}}{a-b}.$$

Если примемъ во вниманіе, что $a=(\sqrt{a})^2$, $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ и $b=(\sqrt{b})^2$, то въ числителѣ полученной дроби мы можемъ вы-

ности за скобки $d\sqrt{a}$, а знаменателя можемъ разложить на 2 множителя:

$$x = \frac{d\sqrt{a}(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}.$$

Слѣдовательно: $x_1 = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, $x_{11} = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

Такъ какъ, освобождая уравненіе отъ знаменателей, мы должны были умножить обѣ части его на выраженіе $x^2(d-x)^2$, содержащее неизвѣстное, то мы должны еще рѣшить вопросъ, не ввели ли мы тѣмъ самымъ постороннихъ рѣшеній, обращающихъ въ нуль выраженіе, на которое умножали. Это выраженіе обращается въ нуль при $x=0$ и при $x=d$; ни то, ни другое изъ этихъ значеній x не значится въ числѣ найденныхъ нами рѣшеній квадратнаго уравненія; значитъ, постороннихъ рѣшеній мы не ввели.

Разсмотримъ теперь различные случаи, какіе могутъ представиться при тѣхъ или другихъ численныхъ значеніяхъ буквъ a, b и d. Прежде всего находимъ, что такъ какъ эти числа по смыслу своему положительныя, то мнимыхъ рѣшеній въ нашей задачѣ быть не можетъ (подъ знакомъ радикала стоятъ лишь числа a и b). Всѣхъ различныхъ случаевъ можетъ представиться пять:

1) Если $a > b$, то оба корня положительные, при чемъ такъ какъ $\sqrt{a}-\sqrt{b} < \sqrt{a} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$, то $x_1 > d$, а $x_{11} < d$.

Значитъ, въ этомъ случаѣ двѣ точки удовлетворяютъ вопросу задачи; обѣ онѣ расположены направо отъ A, одна между A и B, другая за B.

2) Если $a < b$, то x_I отрицательное число, а x_{II} положительное, при чемъ $x_{II} < d$. Положительное рѣшеніе показываетъ что искомая точка лежитъ направо отъ A, именно между A и B; отрицательное же рѣшеніе означаетъ, что есть еще другая равноосвѣщенная точка, лежащая налѣво отъ A на разстояніи, равномъ абсолютной величинѣ отрицательнаго рѣшенія.

3) Если $a=b$, то $x_I=\pm\infty$ и $x_{II}=d/2$. Второе рѣшеніе озна чаетъ, что при равенствѣ силъ источниковъ свѣта равноосвѣ щенная точка должна лежать посрединѣ между ними; перво же рѣшеніе показываетъ, что по мѣрѣ того, какъ a прибли жается къ равенству съ b, искомая точка безпредѣльно уда ляется или направо отъ A, или налѣво отъ A, смотря по тому будетъ ли a, приближаясь къ b, оставаться больше или меньше при этомъ другая равноосвѣщенная точка будетъ приближатьс все болѣе и болѣе къ серединѣ разстоянія между A и B.

4) Если $d\to 0$, при чемъ $a \gtrless b$, то $x_I=x_{II}=0$. Это значитъ что если разстояніе между двумя неравными источниками свѣт уменьшается, приближаясь къ 0, то обѣ равноосвѣщенныя точк неограниченно приближаются къ источнику A.

5) Если $d=0$ и $a=b$, то $x_I=0/0$, $x_{II}=0$. Такъ какъ чи слитель и знаменатель дроби, опредѣляющей величину x_I, н содержатъ никакого общаго множителя, обращающагося въ при сдѣланныхъ предположеніяхъ, то надо ожидать, что значе ніе x_I означаетъ неопредѣленность задачи. И дѣйствительнс если источники свѣта—одинаковой силы и помѣщены въ одном мѣстѣ, то всякая произвольная точка будетъ ими одинаков освѣщена.

ГЛАВА IV.

Комплексныя числа.

227. Цѣль введенія въ алгебру мнимыхъ чиселъ. Корень четной степени изъ отрицательнаго числа, какъ м видѣли (§ 165, IV), не можетъ быть выраженъ ни положительнымъ, н отрицательнымъ числомъ; такой корень называется мнимымъ числомъ.

Введеніе въ алгебру мнимыхъ чиселъ вызвано соображеніями, подобным тѣмъ, по которымъ въ нее допущены отрицательныя числа: и тѣ, и другі имѣютъ цѣлью обобщить нѣкоторыя алгебраическія предложенія и формул Напр., допустивъ мнимыя числа, мы можемъ принимать, что квадратно уравненіе имѣетъ всегда два корня, что трехчленъ 2-й степени разлагае всегда на два множителя первой степени и т. п. Особенно важное зн ченіе имѣютъ мнимыя числа въ теоріи уравненій высшихъ степеней.

Замѣтимъ, что корень всякой четной степени изъ отрицательнаго числ сводится къ нахожденію корня изъ квадратнаго корня изъ отрицательнаг

числа; такъ, $\sqrt[6]{-2}=\sqrt[3]{\sqrt{-2}}$ и вообще $\sqrt[2n]{-a}=\sqrt[n]{\sqrt{-a}}$. Поэтому въ дальнѣйшемъ изложеніи мы будемъ говорить только о квадратномъ корнѣ изъ отрицательнаго числа.

228. Условія, подъ которыми вводятъ мнимыя числа. Этихъ условій два:

1) согласились разсматривать $\sqrt{-a}$, гдѣ $-a$ есть какое угодно отрицательное число, какъ число особаго рода, квадратъ котораго равенъ $-a$;

2) согласились производить надъ мнимыми числами дѣйствія и преобразованія по тѣмъ же правиламъ, по какимъ они производятся надъ числами вещественными, принимая всегда, что $(\sqrt{-a})^2=-a$.

229. Приведеніе $\sqrt{-a}$ къ виду $\sqrt{a}\,\sqrt{-1}$. Мнимое число вида $\sqrt{-a}$ можно замѣнить другимъ: $\sqrt{a}\,\sqrt{-1}$. Дѣйствительно, $\sqrt{-a}$, согласно первому условію, есть такое число, квадратъ котораго равенъ $-a$. Но $\sqrt{a}\,\sqrt{-1}$ также есть такое число, квадратъ котораго равенъ $-a$, потому что, примѣняя къ этому выраженію правило о возвышеніи въ степень произведенія (согласно второму условію), получимъ:

$$(\sqrt{a}\,\sqrt{-1})^2=(\sqrt{a})^2\,(\sqrt{-1})^2=a(-1)=-a.$$

Условились сокращенно обозначать выраженіе $\sqrt{-1}$ одною буквою i (начальная буква слова imaginaire, что значитъ мнимый). Такимъ образомъ, пишутъ:

$$\sqrt{-4}=\sqrt{4}\,\sqrt{-1}=2i;\qquad \sqrt{-3}=\sqrt{3}\,\sqrt{-1}=i\,\sqrt{3}.$$

Приведеніе мнимаго числа къ виду, содержащему множителя i, яснѣе обозначаетъ мнимость радикала, которая безъ того можетъ быть не вполнѣ явною.

230. Комплексныя числа. Общій видъ всякаго вещественнаго или мнимаго числа есть $a+bi$, гдѣ a и b суть какія-либо вещественныя числа, положительныя, отрицательныя, или равныя нулю, а i — обозначеніе $\sqrt{-1}$. Число вида $a+bi$ наз. **комплекснымъ числомъ** [1]); въ немъ a есть вещественная часть, bi мнимая часть. При $a=0$ оно обращается въ мнимое число $bi=b\sqrt{-1}=\sqrt{-b^2}$; при $b=0$ оно даетъ $a+0.i$, что равно одному вещественному числу a, такъ какъ произве-

---

[1]) Слово „комплексный" означаетъ по-русски „сложный", „составной"; такое названіе числу вида $a+bi$ было дано впервые нѣмецкимъ математикомъ Гауссомъ (1777—1855). Названіе „мнимый" (imaginaire) было введено французскимъ математикомъ Декартомъ въ 1637 г.

денiе 0.i, согласно условiю второму § 228-го, должно приниматься равнымъ нулю.

Два комплексныхъ числа вида $a+bi$, $a-bi$ наз. **сопряженными**. Подъ такимъ видомъ представляются корни квадратнаго уравненія, когда они мнимые. Два комплексныя числа вида $a+bi$, $-a-bi$, наз. **противоположными**.

231. Основное начало, которому должны быть подчинены комплексныя числа.

Условившись надъ комплексными числами производить дѣйствія и преобразованія по правиламъ выведеннымъ для вещественныхъ чиселъ, при условіи, что $i^2=-1$, мы должны будемъ подчинить комплексныя числа слѣдующему началу:

Для того, чтобы комплексное число $a+bi$ равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы $a=0$ и $b=0$.

Хотя предложеніе это можно было бы разсматривать, какъ у с л о в і е, которое мы ставимъ относительно комплекснаго числа и которое, слѣд., не нуждается въ доказательствѣ, однако полезно обнаружить, что оно не находится въ противорѣчіи съ поставленными нами ранѣе двумя условіями (§ 228), а составляетъ естественное слѣдствіе ихъ. Дѣйствительно, положимъ, что $a+bi=0$. Тогда, совершая надъ этимъ равенствомъ преобразованія, дозволительныя для равенствъ съ вещественными числами, и принимая $i^2=-1$, мы будемъ имѣть:

$$a=-bi;\quad a^2=(-bi)^2=b^2i^2=-b^2;\quad a^2+b^2=0.$$

Такъ какъ a^2 и b^2 суть числа положительныя, а сумма двухъ положительныхъ чиселъ равняется нулю только тогда, когда каждое изъ нихъ отдѣльно равно нулю, то, значитъ, необходимо: $a=0$, $b=0$. Обратно, если положимъ, что $a=0$ и $b=0$, то $a+bi=0+0.i$; принимая умноженіе на нуль и сложеніе съ нулемъ въ томъ же условномъ смыслѣ, какой принятъ для вещественныхъ чиселъ, мы должны принять, что $0+0.i=0$.

Слѣдствіе. **Для того, чтобы числа $a+bi$ и $a'+b'i$ были равны, необходимо и достаточно, чтобы $a=a'$ и $b=b'$.**

Дѣйствительно, если $a+bi=a'+b'i$, то $(a-a')+(b-b')i=0$ и, слѣдовательно, $a-a'=0$ и $b-b'=0$, т.-е. $a=a'$ и $b=b'$.

Обратно, если $a=a'$ и $b=b'$, то число $a+bi$ мы должны принимать равнымъ числу $a'+b'i$, такъ какъ эти комплексныя выраженія въ этомъ случаѣ ничѣмъ другъ отъ друга не отличаются.

Изъ равенства комплексныхъ чиселъ непосредственно слѣдуетъ, что если 2 числа равны одному и тому же 3-му, то они равны и между собою.

Замѣчаніе. Относительно комплексныхъ чиселъ не принято никакого соглашенія, какое изъ нихъ считать бо́льшимъ другого.

232. Дѣйствія надъ комплексными числами.

Чтобы произвести какое-нибудь дѣйствіе надъ мнимыми числами, надо

прежде всего каждое изъ нихъ привести къ виду комплекснаго числа $a+bi$, затѣмъ произвести дѣйствія надъ двучленами такого вида по тѣмъ правиламъ, которыя выведены были для двучленовъ съ вещественными членами (согласно условію второму § 228-го) и, наконецъ, въ результатѣ замѣнить вездѣ i^2 черезъ -1 (согласно условію первому того же §).

Сложеніе. $(a+bi)+(a_1+b_1i)=(a+a_1)+(b+b_1)i$;

$(a+bi)+(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a+a_1+a_2)+(b+b_1+b_2)i$; и т. п.

Отсюда легко усмотрѣть, что сумма комплексныхъ чиселъ обладаетъ тѣми же свойствами, какія принадлежатъ суммѣ вещественныхъ чиселъ (§ 20), т.-е. свойствами перемѣстительнымъ и сочетательнымъ.

Вычитаніе. $(a+bi)-(a_1+b_1i)=(a-a_1)+(b-b_1)i$.

Отсюда видно, что къ вычитанію комплексныхъ чиселъ можно примѣнять общее правило вычитанія алгебраическихъ чиселъ (§ 23), т.-е., чтобы вычесть какое-нибудь число, достаточно прибавить число противоположное; такъ, вмѣсто того, чтобы отъ $a+bi$ вычесть a_1+b_1i, можно къ $a+bi$ прибавить $-a_1-b_1i$.

Замѣтимъ, что сумма или разность двухъ комплексныхъ чиселъ можетъ иногда оказаться числомъ вещественнымъ (напр., сумма сопряженныхъ комплексныхъ чиселъ).

Умноженіе. $(a+bi)(a_1+b_1i)=aa_1+a_1bi+ab_1i+bb_1i^2=(aa_1-bb_1)+$
$+(a_1b+ab_1)i$.

Подобнымъ образомъ можно составить произведеніе трехъ и болѣе комплексныхъ чиселъ.

Легко убѣдиться (повѣркой), что произведеніе комплексныхъ чиселъ такъ же, какъ и вещественныхъ (§ 33), обладаетъ свойствами: перемѣстительнымъ, сочетательнымъ и распредѣлительнымъ (относительно сложенія). Напр., чтобы провѣрить послѣднее свойство, выражаемое равенствомъ:

$$[(a+bi)+(a_1+b_1i)](a_2+b_2i)=(a+bi)(a_2+b_2i)+(a_1+bi_1)(a_2+b_2i),$$

выполнимъ дѣйствія, указанныя въ каждой части этого равенства. Лѣвая часть дастъ:

$$[(a+a_1)a_2-(b+b_1)b_2]+[(b+b_1)a_2+(a+a_1)b_2]i=(aa_2+a_1a_2-bb_2-$$
$$-b_1b_2)+(ba_2+b_1a_2+ab_2+a_1b_2)i.$$

Въ правой части получается то же самое выраженіе.

Провѣримъ еще слѣдующее важное свойство произведенія:

для того, чтобы произведеніе комплексныхъ чиселъ равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы одно изъ этихъ чиселъ равнялось нулю.

Дѣйствительно, если $$(a+bi)(a_1+b_1i)=0,$$
то $$(aa_1-bb_1)+(a_1b+ab_1)i=0$$
и слѣд., $$\begin{cases} aa_1-bb_1=0, \\ a_1b+ab_1=0. \end{cases} \tag{1}$$

Умноживъ первое уравненіе этой системы на a и второе на b, сложимъ ихъ:
$$a^2a_1+b^2a_1=0 \text{ или } a_1(a^2+b^2)=0.$$

Умноживъ первое уравненіе системы (1) на b и второе на a, вычтемъ изъ второго первое:
$$a^2b_1+b^2b_1=0 \text{ или } b_1(a^2+b^2)=0. \tag{3}$$

Изъ равенствъ (2) и (3) заключаемъ, что или $a^2+b^2=0$, или $a_1=0$, $b_1=0$. Если первое, то $a=0$ и $b=0$ и, слѣд., $a+bi=0$; если второе, то $a_1+b_1i=0$.

Обратно, пусть $a+bi=0$, т.-е. $a=0$ и $b=0$; но тогда и $aa_1-bb_1=0$, и $a_1b+ab_1=0$; слѣд., и произведеніе $(a+bi)$ на (a_1+b_1i) равно 0.

Замѣтимъ, что произведеніе двухъ сопряженныхъ комплексныхъ чиселъ $(a+bi)(a-bi)$ равно положительному вещественному числу a^2+b^2.

Дѣленіе. Обозначимъ частное $(a+bi):(a_1+b_1i)$ черезъ $x+yi$, гдѣ x и y предположимъ вещественными числами. Тогда, по опредѣленію дѣленія, будемъ имѣть:
$$(a_1+b_1i)(x+yi)=a+bi,$$
т.-е. $$(a_1x-b_1y)+(b_1x+a_1y)i=a+bi,$$
откуда $$\begin{cases} a_1x-b_1y=a, \\ b_1x+a_1y=b. \end{cases}$$

Умноживъ первое уравненіе на a_1, а второе на b_1 и сложивъ оба уравненія, получимъ:
$$(a_1^2+b_1^2)x=aa_1+bb_1 \quad \text{и} \quad x=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}.$$

Умноживъ первое уравненіе на b_1, а второе на a_1 и вычтя изъ второго первое, получимъ:
$$(a_1^2+b_1^2)y=a_1b-ab_1 \quad \text{и} \quad y=\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}.$$

Формулы, найденныя для x и y, даютъ возможное рѣшеніе, если только $a_1^2+b_1^2 \neq 0$, т.-е. если a_1 и b_1 не равны одновременно нулю; другими словами, если дѣлитель a_1+b_1i не равенъ нулю.

Въ этомъ случаѣ, слѣд., будемъ имѣть:
$$(a+bi):(a_1+b_1i)=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}+i\,\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}.$$

Замѣчаніе. Это же частное мы могли бы получить проще, умноживъ въ дроби $\frac{a+bi}{a_1+b_1i}$ числителя и знаменателя на комплексное число a_1-b_1i

сопряженное съ знаменателемъ:

$$\frac{(a+bi)(a_1-b_1i)}{(a_1+b_1i)(a_1-b_1i)}=\frac{aa_1-bb_1i^2+(a_1b-ab_1)i}{a_1^2-(b_1i)^2}=\frac{aa_1+bb_1+(a_1b-ab_1)i}{a_1^2+b_1^2}=$$

$$=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}+i\,\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}.$$

Возвышеніе въ степень. Предварительно найдемъ результаты отъ возвышенія въ степень мнимаго числа i, зная, что, согласно условію, i^2 должно принимать равнымъ -1.

$$i^1=i;\ i^2=-1;\ i^3=i^2.i=(-1)\,i=-i;\ i^4=i^3\cdot i=-i^2=+1;$$

$$i^5=i^4.i=(+1)\,i=i;\ i^6=i^5.i=i^2=-1;\ i^7=i^6.i=(-1)\,i=-i \text{ и т. д.}$$

Такимъ образомъ, послѣдовательныя степени i даютъ повторяющіеся результаты, а именно, слѣдующіе четыре: i, -1, $-i$, $+1$. Чтобы узнать какой изъ этихъ результатовъ получится при возвышеніи i въ степень съ показателемъ n, достаточно раздѣлить n на 4 и обратить вниманіе только на остатокъ отъ дѣленія. Такъ:

$$i^{27}=i^{4.6+3}=i^3=-i,$$

$$i^{17}=i^{4.4+1}=i.$$

Замѣтимъ еще, что i^0 мы будемъ принимать равнымъ 1.

Теперь легко найдемъ результаты возвышенія $a+bi$ въ степень съ цѣлымъ положительнымъ показателемъ, такъ:

$$(a+bi)^2+a^2+2abi+b^2i^2=(a^2-b^2)+2abi.$$

$$(a+bi)^3=a^3+3a^3(bi)+3a(bi)^2+(bi)^3=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)\,i \text{ и т. д.}$$

Извлеченіе квадратнаго корня. Положимъ, что

$$\sqrt{a+bi}=x+yi.$$

Откуда:

$$a+bi=(x^2-y^2)+2xyi.$$

Слѣд.

$$\begin{cases} x^2-y^2=a \\ 2xy=b. \end{cases} \qquad (1)$$

Вопросъ приводится къ нахожденію вещественныхъ корней этой системы. Возвысивъ оба уравненія въ квадратъ и затѣмъ сложивъ ихъ, получимъ:

$$(x^2+y^2)^2=a^2+b^2 \text{ и } x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}.$$

(Знакъ — передъ радикаломъ отброшенъ, такъ какъ при вещественныхъ значеніяхъ x и y выраженіе x^2+y^2 не можетъ быть отрицательнымъ.) Возьмемъ послѣднее уравненіе совмѣстно съ первымъ уравненіемъ системы (1) складывая ихъ и вычитая, получимъ:

$$x^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} \text{ и } x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}},$$

$$y^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2} \text{ и } y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

Изъ втораго уравненія системы (1) усматриваемъ, что знаки у x и y должны быть одинаковые, если $b>0$, и разные, если $b<0$. Поэтому:

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right] \text{ при } b>0$$

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right] \text{ при } b<0$$

Примѣры.

1) $\sqrt{5+12\sqrt{-1}}=\sqrt{5+12i}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}}\right]=$

$$=\pm\left(\sqrt{\frac{18}{2}}+i\sqrt{\frac{8}{2}}\right)=\pm(\sqrt{9}+i\sqrt{4})=\pm(3+2i).$$

2) $\sqrt{\sqrt{-1}}=\sqrt{i}=\sqrt{0+1.i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}+0}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}-0}{2}}\right)=$

$$=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\pm\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right).$$

3) $\sqrt{-\sqrt{-1}}=\sqrt{-i}=\sqrt{0-1.i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}+0}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}-0}{2}}\right)=$

$$=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}}-i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\pm\left(\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}\right).$$

Замѣчаніе. Чтобы изъ комплексныхъ чиселъ можно было извлечь корень третьей или высшей степени, имъ надо придать иной видъ (тригонометрическій), о чемъ мы здѣсь говорить не будемъ.

ГЛАВА V.

Освобожденіе уравненія отъ радикаловъ.

233. Теорема. Отъ возвышенія обѣихъ частей уравненія въ одну и ту же степень получаемъ новое уравненіе, которое, сверхъ корней перваго уравненія, можетъ имѣть еще и посторонніе корни.

Док. Пусть имѣемъ уравненіе $A=B$. Возвысимъ обѣ его части въ одну и ту же степень, напр., въ квадратъ. Тогда получимъ: $A^2=B^2$. Представимъ это уравненіе въ такомъ видѣ:

$$A^2-B^2=0 \text{ или } (A-B)(A+B)=0.$$

Чтобы произведеніе равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы одинъ изъ сомножителей равнялся нулю; значитъ, послѣднее уравненіе удовлетворяется и такими значеніями x, при которыхъ $A - B = 0$, и такими, при которыхъ $A + B = 0$. Первыя значенія удовлетворяютъ данному уравненію, такъ какъ если $A - B = 0$, то это значитъ, что $A = B$. Вторыя значенія x окажутся посторонними для даннаго уравненія, такъ какъ если $A + B = 0$, то это значитъ, что $A = -B$, тогда какъ данное уравненіе требуетъ, чтобы $A = B$.

Вообще, возвысивъ обѣ части уравненія $A = B$ въ n-ую степень, получимъ:

$$A^n = B^n \text{ или } A^n - B^n = 0.$$

Разность одинаковыхъ степеней двухъ чиселъ можетъ быть представлена въ видѣ произведенія двухъ множителей (§ 86):

$$A^n - B^n = (A - B)\ (A^{n-1} + BA^{n-2} + B^2A^{n-3} + \ldots + B^{n-1}).$$

Слѣд., данное уравненіе распадается на два уравненія:

$$A - B = 0 \text{ и } A^{n-1} + BA^{n-2} + B^2A^{n-3} + \ldots + B^{n-1} = 0.$$

Первое изъ нихъ есть данное уравненіе; второе доставляетъ постороннія рѣшенія. Если случится, что это второе уравненіе совсѣмъ не имѣетъ рѣшеній, то тогда постороннихъ рѣшеній не будетъ.

Примѣръ. $3x - 2 = 2x$ (одинъ корень $x = 2$).

Послѣ возвышенія въ квадратъ получимъ:

$$(3x-2)^2 = (2x)^2, \text{ т.-е. } 9x^2 - 12x + 4 = 4x^2$$

или

$$5x^2 - 12x + 4 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{5} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{5} = \frac{6 \pm 4}{5};$$

$$x_1 = 2;\ x_2 = \tfrac{2}{5}.$$

Первый корень удовлетворяетъ данному уравненію, а второй для него посторонній; онъ удовлетворяетъ измѣненному уравненію:

$$3x - 2 = -2x.$$

Слѣдствіе. Если для рѣшенія уравненія приходится обѣ его части возвысить въ одну и ту же степень, то, найдя корни полученнаго уравненія, мы должны особымъ изслѣдованіемъ опре-

дѣлить, какіе изъ нихъ годятся для даннаго уравненія; для э каждый изъ корней подставляемъ въ данное уравненіе и кимъ образомъ находимъ тѣ изъ нихъ, которые обращаю это уравненіе въ тождество.

234. Рѣшеніе уравненія, въ которомъ неиз вѣстное входитъ подъ знаки радикаловъ. Чтобъ рѣшить такое уравненіе, его должно предварительно освободить отъ радикаловъ. Ограничимся указаніемъ, какъ этого достигнуть въ двухъ простѣйшихъ случаяхъ.

Замѣтимъ, что во всѣхъ приводимыхъ ниже примѣрахъ знакъ $\sqrt{}$ означаетъ ариѳметическое значеніе корня.

Случай I: уравненіе содержитъ только одинъ радикалъ (какой-нибудь степени). Переносятъ всѣ раціональные члены въ одну часть уравненія, оставивъ радикалъ въ другой (уединяютъ радикалъ); затѣмъ возвышаютъ обѣ части уравненія въ степень, показатель которой равенъ показателю радикала.

Примѣръ I. $\sqrt{x+7}-x-1=0.$

Уединимъ радикалъ: $\sqrt{x+7}=x+1$.

Возвысимъ обѣ части уравненія въ квадратъ: $x+7=x^2+2x+1$. Рѣшивъ это уравненіе, получимъ: $x_1=2$, $x_2=-3$. Испытавъ эти значенія, находимъ, что данному уравненію удовлетворяетъ только x_1; второе рѣшеніе принадлежитъ уравненію: $-\sqrt{x+7}=x+1$.

Примѣръ 2. $2+\sqrt[4]{x^2-9}=0.$

Уединивъ радикалъ, получимъ: $\sqrt[4]{x^2-9}=-2$. Возвысивъ въ четвертую степень, найдемъ:

$$x^2-9=16;\ \text{откуда: } x=\pm 5.$$

Ни одно изъ этихъ рѣшеній не удовлетворяетъ данному уравненію. Оба они принадлежатъ ур. $-\sqrt[4]{x^2-9}=-2$.

Примѣръ 3. $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\sqrt{\frac{1}{a^2x^2}+\frac{5}{x^4}}}.$

Возвысимъ обѣ части уравненія въ квадратъ и отбросимъ въ обѣихъ частяхъ одинаковые члены $\frac{1}{a^2}$:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{2}{ax}=\sqrt{\frac{1}{a^2x^2}+\frac{5}{x^4}}.$$

Послѣ вторичнаго возвышенія въ квадратъ получаемъ:

$$\frac{1}{x^4}+\frac{4}{ax^3}+\frac{4}{a^2x^2}=\frac{1}{a^2x^2}+\frac{5}{x^4}.$$

Откуда:

$$3x^2+4ax-4a^2=0.$$

Слѣд.,

$$x=\frac{-2a\pm\sqrt{4a^2+12a^2}}{3}=\frac{-2a\pm 4a}{3},$$

$$x_1=\frac{2a}{3},\qquad x_2=-2a.$$

Подстановкою убѣждаемся, что рѣшеніе x_1 удовлетворяетъ данному уравненію, а рѣшеніе x_2 для него постороннее.

Случай 2: уравненіе содержитъ нѣсколько квадратныхъ радикаловъ. Напримѣръ, пусть уравненіе, приведенное къ цѣлому виду, содержитъ три радикала: $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ и $\sqrt{c}$, гдѣ a, b и c обозначаютъ какія-либо алгебраическія выраженія, содержащія неизвѣстныя. Желая освободить уравненіе отъ $\sqrt{a}$, вынесемъ этотъ радикалъ за скобки изъ всѣхъ членовъ, гдѣ онъ встрѣчается, затѣмъ уединимъ его и возвысимъ обѣ части уравненія въ квадратъ; этимъ освободимъ уравненіе отъ $\sqrt{a}$ и не введемъ никакихъ новыхъ радикаловъ. Подобно этому освобождаемъ уравненіе отъ $\sqrt{b}$ и затѣмъ отъ $\sqrt{c}$.

Примѣръ. $\sqrt{x+x^2}+\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x-x^2}+\sqrt{1+x}=0$.

Такъ какъ $x+x^2=x(1+x)$, $1-x^2=(1+x)(1-x)$, $x-x^2=x(1-x)$, то, положивъ для краткости: $1+x=a$, $x=b$, $1-x=c$, получимъ уравненіе такого вида:

$$\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}+\sqrt{a}=0.$$

Выносимъ $\sqrt{a}$ за скобки и уединяемъ его:

$$\sqrt{a}(\sqrt{b}+\sqrt{c}+1)=-\sqrt{bc}.$$

Возвышеніе въ квадратъ даетъ:

$$a(b+c+1+2\sqrt{bc}+2\sqrt{b}+2\sqrt{c})=bc.$$

Выносимъ $\sqrt{b}$ за скобки и уединяемъ его:

$$2a\sqrt{b}(1+\sqrt{c})=bc-ab-ac-a-2a\sqrt{c}=A-2a\sqrt{c},$$

гдѣ

$$A=bc-ab-ac-a.$$

Возвышеніе въ квадратъ даетъ:

$$4a^2b(1+c+2\sqrt{c})=A^2-4aA\sqrt{c}+4a^2c.$$

Выносимъ за скобки $\sqrt{c}$ и уединяемъ его:

$$4a\sqrt{c}(2ab+A)=A^2+4a^2c-4a^2b-4a^2bc.$$

Возвысивъ въ квадратъ, окончательно находимъ:

$$16a^2c(2ab+A)^2=(A^2+4a^2c-4a^2b-4a^2bc)^2.$$

Подставивъ вмѣсто a, b и c ихъ выраженія, получимъ раціональное уравненіе съ неизвѣстнымъ x.

235. Освобожденіе уравненія отъ знаковъ радикала помощью неопредѣленныхъ коэффиціентовъ. Укажемъ наиболѣе простой способъ приведенія уравненія къ раціональному виду. Пусть данное уравненіе содержитъ $\sqrt[n]{q}$ (гдѣ q есть какое-нибудь выраженіе, заключающее неизвѣстныя), при чемъ этотъ радикалъ можетъ входить въ уравненіе въ различныхъ степеняхъ, т.-е. въ немъ могутъ встрѣчаться: $\sqrt[n]{q}, \sqrt[n]{q^2}=(\sqrt[n]{q})^2, \sqrt[n]{q^3}=(\sqrt[n]{q})^3$ и т. д. Обозначивъ для краткости $\sqrt[n]{q}$ черезъ r, можемъ положить:

$$\sqrt[n]{q}=r,\ \sqrt[n]{q^2}=r^2,\ \sqrt[n]{q^3}=r^3...$$

Предположимъ далѣе, что, замѣнивъ въ уравненіи различныя степени $\sqrt[n]{q}$ соотвѣтственными степенями r, мы получимъ уравненіе вида раціональнаго и цѣлаго относительно r. Къ такому виду всегда можетъ быть приведено уравненіе. Въ самомъ дѣлѣ, если бы въ немъ были члены, дробные относительно $\sqrt[n]{q}$, мы могли бы предварительно освободить

его отъ знаменателей; далѣе, если бы $\sqrt[n]{q}$ стоялъ подъ знакомъ другого радикала (т.-е. уравненіе содержало бы сложные радикалы), мы тогда обозначили бы черезъ r этотъ сложный радикалъ, съ цѣлью предварительно освободиться отъ него.

Если въ уравненіи встрѣтятся члены, содержащіе r съ показателемъ, бо̀льшимъ или равнымъ n, мы можемъ въ каждомъ изъ нихъ сдѣлать показателя меньшимъ n, основываясь на равенствѣ: $r^n = q$. Такъ:

$$r^{n+1} = r^n r = qr;\ r^{n+2} = r^n r^2 = qr^2; \text{ и т. д.}$$

Понизивъ, такимъ образомъ, показателей при r вездѣ, гдѣ можно, мы приведемъ уравненіе къ виду:

$$ar^{n-1} + br^{n-2} + cr^{n-3} + \ldots + kr + l = 0, \tag{1}$$

гдѣ коэффиціенты $a, b, c \ldots k$ и l могутъ содержать другіе радикалы (нѣкоторые изъ этихъ коэффиціентовъ могутъ равняться 0).

Чтобы освободить это уравненіе отъ всѣхъ степеней радикала r, умножимъ обѣ его части на многочленъ степени $n - 1$:

$$Ar^{n-1} + Br^{n-2} + Cr^{n-3} + \ldots + L, \tag{2}$$

въ которомъ всѣ n коэффиціентовъ оставимъ пока неопредѣленными. Послѣ умноженія правая часть уравненія будетъ 0, а лѣвая обратится въ многочленъ:

$$aAr^{2n-2} + (aB + bA)r^{2n-3} + (aC + bB + cA)r^{2n-4} + \ldots + lL.$$

Понизимъ въ этомъ многочленѣ показателей при r во всѣхъ членахъ, гдѣ эти показатели больше или равны n, и соединимъ въ одинъ всѣ члены, содержащіе одинаковыя степени r, тогда получимъ уравненіе вида:

$$Mr^{n-1} + Nr^{n-2} + \ldots + Rr + S = 0, \tag{3}$$

гдѣ $M, N \ldots$ и S суть нѣкоторые многочлены первой степени относительно неопредѣленныхъ коэффиціентовъ $A, B, C \ldots L$ (какъ легко видѣть изъ разсмотрѣнія процесса полученія этихъ выраженій).

Составимъ теперь систему n—1 уравненій первой степени съ n неизвѣстными $A, B, C \ldots L$:

$$M = 0,\ N = 0, \ldots R = 0. \tag{4}$$

Рѣшивъ эту систему и вставивъ найденныя значенія неопредѣленныхъ коэффиціентовъ въ ур. (3), получимъ уравненіе, не содержащее $\sqrt[n]{q}$:

$$S = 0. \tag{5}$$

Такимъ образомъ, весь вопросъ въ томъ, существуетъ ли такое рѣшеніе системы (4), въ которомъ хотя бы одно изъ неизвѣстныхъ: $A, B, C, \ldots L$ имѣло значеніе, отличное отъ нуля (если бы всѣ эти неизвѣстныя оказались нулями, то тогда уравненіе (5) обратилось бы въ тождество: $0 = 0$ и мы такимъ образомъ ничего не достигли бы). Для рѣшенія этого вопроса примемъ во вниманіе, что всѣ уравненія системы (4) однородны относи

только неизвѣстныхъ A, B, $C\ldots$, т.-е. лѣвая часть каждаго отъ нихъ представляетъ собою однородный многочленъ (1-й степени) относительно этихъ неизвѣстныхъ, а правая часть есть 0; кромѣ того, число неизвѣстныхъ (n) превосходитъ число ($n-1$) уравненій. Относительно такихъ уравненій можно доказать слѣдующую теорему (мы примемъ ее безъ доказательства[1]): **если въ системѣ однородныхъ уравненій 1-й степени число неизвѣстныхъ превышаетъ число уравненій, то всегда существуетъ такое рѣшеніе этой системы, въ которомъ значеніе хотя бы одного изъ неизвѣстыхъ отлично отъ нуля.** Согласно этой теоремѣ система (4) всегда допускаетъ такое рѣшеніе.

Для облегченія ея рѣшенія примемъ во вниманіе, что если эта система допускаетъ какое-либо рѣшеніе:

$$A = A_0 \neq 0, \quad B = B_0, \quad C = C_0, \ldots \; L = L_0, \tag{6}$$

то она допускаетъ также и такое рѣшеніе:

$$A = 1, \quad B = \frac{B_0}{A_0}, \quad C = \frac{C_0}{A_0}, \ldots \; L = \frac{L_0}{A_0}. \tag{7}$$

Въ самомъ дѣлѣ, если значенія ряда (6) представляютъ собою рѣшеніе системы (4), которой уравненія однородны и 1-й степени, то, подставивъ въ этой системѣ на мѣсто неизвѣстныхъ значенія ряда (6), мы получимъ систему тождествъ, однородныхъ и 1-й степени относительно чиселъ A_0, B_0, $C_0\ldots$ Очевидно, что тождества эти останутся тождествами, если всѣ ихъ члены раздѣлимъ на число A_0, которое, согласно предположенію отлично отъ нуля. Но тогда мы получимъ такія же тождества, только вмѣсто A_0 будетъ стоять 1, вмѣсто B_0 дробь B_0/A_0, вмѣсто C_0 дробь C_0/A_0 и т. д. Значитъ, система (4) будетъ удовлетворяться и рядомъ (7).

Такимъ образомъ, относительно коэффиціента A достаточно разсмотрѣть только два случая: или $A=1$, или $A=0$. Предположимъ сначала 1-й случай. Вставивъ 1 вмѣсто A въ уравненія системы (4), мы получимъ систему $n-1$ уравн. съ $n-1$ неизвѣстными: $B, C, \ldots L$. Рѣшивъ эту систему какимъ-либо изъ указываемыхъ въ алгебрѣ способовъ, мы либо найдемъ опредѣленныя значенія для $B, C, \ldots L$ (и тогда вопросъ будетъ рѣшенъ), либо убѣдимся, что уравненія системы (4) несовмѣстны при допущеніи, что $A=1$. Тогда, положивъ $A=0$, получимъ навѣрно совмѣстныя $n-1$ ур. съ $n-1$ неизвѣстными; остается ихъ рѣшить.

Полезно замѣтить, что окончательное уравненіе: $S=0$ обладаетъ вообще посторонними рѣшеніями, именно тѣми, которыя удовлетворяютъ уравненію:

$$Ar^{n-1} + Br^{n-2} + Cr^{n-3} + \ldots + L = 0.$$

Если въ данномъ уравненіи встрѣчаются другіе радикалы, помимо $\sqrt[n]{q} = r$, мы тѣмъ же пріемомъ послѣдовательно уничтожимъ и ихъ.

---

[1]) Элементарное доказательство этой теоремы указано г. Е. Л. Буницкимъ въ № 630 „Вѣстника оп. физики и элем. математики" за 1915 г.

236. Примѣръ 1. $\sqrt[4]{(2-x)^3}-\sqrt[4]{2-x}+1=0.$

Для краткости обозначимъ $2-x$ черезъ q; тогда уравненіе будетъ $\sqrt[4]{q^3}-\sqrt[4]{q}+1=0$. Если положимъ: $\sqrt[4]{q}=r$, то уравненіе приметъ видъ:

$$r^3-r+1=0.$$

Умножимъ обѣ части уравненія на многочленъ:

$$Ar^3+Br^2+Cr+D$$

съ 4-мя неопредѣленными коэффиціентами A, B, C и D. Послѣ умноженія будемъ имѣть:

$$Ar^6+Br^5+(-A+C)r^4+(A-B+D)r^3+(B-C)r^2+(C-D)r+D=0$$

т.-е. $$Aqr^2+Bqr+(C-A)q+\ldots\ldots\ldots=0;$$

$$(A-B+C)r^3+(Aq+B-C)r^2+(Bq+C-D)r+[D+(C-A)q]=0$$

Положимъ, что $\begin{cases} A-B+D=0 \\ qA+B-C=0 \\ qB+C-D=0 \end{cases}$

Пусть $A=1$. Тогда $\begin{cases} -B+D=-1 \\ B-C=-q \\ qB+C-D=0. \end{cases}$

Откуда находимъ: $B=-\dfrac{q+1}{q}$; $C=\dfrac{q^3-q-1}{q}$; $D=-\dfrac{2q+1}{q}$

$$D+(C-A)q=-\frac{2q+1}{q}+\left(\frac{q^3-q-1}{q}-1\right)q=\frac{q^3-2q^2-3q-1}{q}.$$

Теперь уравненіе приводится къ виду: $q^3-2q^2-3q-1=0$.

Подставивъ на мѣсто q разность $2-x$ и произведя упрощенія, окончательно получимъ уравненіе: $x^3-4x^2+x+7=0$.

Примѣръ 2. $\sqrt[3]{q^2}-2\sqrt[3]{q}+4=0.$

$$\sqrt[3]{q}=r;\quad \sqrt[3]{q^2}=r^2;\quad r^2-2r+4=0.$$

$$(r^2-2r+4)(Ar^2+Br+C)=Ar^4+(B-2A)r^3+(C-2B+4A)r^2+$$
$$+(4B-2C)r+4C=Aqr+(B-2A)q+\ldots=$$
$$=(C-2B+4A)r^2+(4B-2C+Aq)r+[4C+(B-2A)q]=0.$$

Положимъ, что $\begin{cases} 4A-2B+C=0 \\ qA+4B-2C=0. \end{cases}$

При $A=1$ эта система оказывается невозможной. Значитъ, надо положить $A=0$. Тогда:

$$\begin{cases} -2B+C=0 \\ +4B-2C=0. \end{cases}$$

Такъ какъ второе уравненіе есть слѣдствіе 1-го, то система эта не опредѣленна, т. е. она допускаетъ безчисленное множество рѣшеній. Одно изъ простѣйшихъ рѣшеній есть: $B=1$, $C=2$.

Тогда $$4C+(B-2A)q=8+q=0.$$

237. Приведеніе знаменателя дроби къ раціональному виду. Для этой цѣли можетъ служить тотъ же пріемъ, который въ предыдущемъ параграфѣ былъ нами указанъ для освобожденія уравненія отъ знаковъ радикала. Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что если для уничтоженія различныхъ степеней $\sqrt[n]{q}$ въ уравненіи $F=0$ достаточно умножить обѣ его части на прилично выбранный многочленъ F_1, то для уничтоженія различныхъ степеней $\sqrt[n]{q}$ въ знаменателѣ F дроби достаточно умножить числителя и знаменателя на F_1.

Пусть, напр., имѣемъ дробь:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{2}+1}=\frac{1}{r^3-r+1},$$

гдѣ $r=\sqrt[4]{2}$. Множитель, обращающій знаменателя этой дроби въ раціональное выраженіе, есть многочленъ Ar^3+Br^2+Cr+D, коэффиціенты котораго мы уже опредѣлили въ примѣрѣ 1-мъ предыдущаго параграфа. Они равны (полагаемъ $q=2$):

$$A=1,\quad B=-\frac{3}{2},\quad C=\frac{1}{2},\quad D=-\frac{5}{2}.$$

Значитъ: $$Ar^3+Br^2+Cr+D=\sqrt[4]{8}-\frac{3}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt[4]{2}-\frac{5}{2}.$$

Послѣ умноженія въ знаменателѣ получимъ:

$$D+(C-A)q=-\frac{5}{2}+\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot 2=-\frac{5}{2}-1=-\frac{7}{2}.$$

Значитъ, дробь приметъ видъ: $$\frac{-2\sqrt[4]{8}+3\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}+5}{7}.$$

ГЛАВА VI.

Нѣкоторыя уравненія высшихъ степеней.

238. Биквадратное уравненіе. Такъ наз. уравненіе четвертой степени, содержащее неизвѣстное только въ четныхъ степеняхъ. Общій видъ его слѣдующій:

$$ax^4+bx^2+c=0 \tag{1}$$

Такое уравненіе легко приводится къ квадратному посредствомъ введенія вспомогательнаго неизвѣстнаго. Положимъ что $x^2 = y$; тогда $x^4 = (x^2)^2 = y^2$, и уравненіе приметъ видъ:

$$ay^2 + by + c = 0. \qquad (2)$$

Откуда: $y_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $y_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Подставивъ каждое изъ этихъ значеній въ уравненіе $x^2 = y$ найдемъ, что биквадратное уравненіе имѣетъ 4 корня:

$$x_1 = +\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, \quad x_3 = +\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}};$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}; \quad x_4 = -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Если корни y_1 и y_2 вспомогательнаго квадратнаго уравненія (2) окажутся мнимыми (что будетъ при $b^2 - 4ac < 0$), то всѣ 4 корня биквадратнаго уравненія (1) будутъ также мнимые. Если y_1 и y_2 окажутся вещественные неравные (что будетъ при $b^2 - 4ac > 0$) то могутъ представиться 3 случая: 1) одинъ изъ корней y_1 и y_2 положителенъ, другой отрицателенъ; въ этомъ случаѣ 2 корня биквадратнаго уравненія — вещественные, а два — мнимые: 2) оба корня y_1 и y_2 положительны; тогда всѣ 4 корня биквадратнаго уравненія вещественные; 3) оба корня y_1 и y_2 отрицательны; тогда всѣ 4 корня биквадратнаго уравненія мнимые. Наконецъ, если корни y_1 и y_2 равны (что будетъ при $b^2 - 4ac = 0$) то 4 корня биквадратнаго уравненія дѣлаются попарно равными

$$x_1 = x_3 = +\sqrt{\frac{-b}{2a}}; \quad x_2 = x_4 = -\sqrt{\frac{-b}{2a}}$$

и будутъ или всѣ вещественные, или всѣ мнимые.

Примѣръ. Рѣшить уравненіе $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

$$x^2 = y; \quad x^4 = y^2; \quad y^2 - 13y + 36 = 0;$$

$$y = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - 36} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{13 \pm 5}{2}.$$

$$y_1 = \frac{13 + 5}{2} = 9; \quad y_2 = \frac{13 - 5}{2} = 4;$$

$$x = \pm\sqrt{y}; \quad x_1 = +\sqrt{9} = 3; \quad x_2 = -\sqrt{9} = -3; \quad x_3 = +\sqrt{4} = 2;$$

$$x_4 = -\sqrt{4} = -2.$$

239. Преобразованіе сложнаго радикала $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$

Корни биквадратнаго уравненія, какъ мы видѣли, выражаются подъ видомъ сложнаго радикала $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$. Такой радикалъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ возможно представить въ видѣ суммы или разности двухъ простыхъ радикаловъ. Покажемъ, какъ и при какихъ условіяхъ это можно сдѣлать.

Пусть въ сложномъ радикалѣ $\sqrt{A + \sqrt{B}}$ числа A и B будутъ раціональныя, при чемъ $\sqrt{B}$ число вещественное ирраціональное (и, слѣд., B число положительное). Предположимъ, что возможно равенство:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y},$$

въ которомъ числа x и y положительныя раціональныя. Возвысивъ обѣ части этого равенства въ квадратъ, получимъ:

$$A + \sqrt{B} = x + y + 2\sqrt{xy} = x + y + \sqrt{4xy}.$$

Откуда: $$\sqrt{4xy} = (A - x - y) + \sqrt{B}$$

и слѣд.: $$4xy = (A - x - y)^2 + B + 2(A - x - y)\sqrt{B}.$$

Лѣвая часть этого уравненія есть число раціональное; значитъ, и правая часть должна быть числомъ раціональнымъ. Но это возможно только тогда, когда коэффиціентъ при $\sqrt{B}$ будетъ равенъ нулю. Положивъ

$$A - x - y = 0, \text{ находимъ: } x + y = A; \text{ тогда } 4xy = B,$$

или: $$x + y = A, \quad xy = \frac{B}{4}.$$

Изъ этихъ равенствъ видно, что x и y можно разсматривать, какъ корни такого квадратнаго уравненія, у котораго коэффиціентъ при неизвѣстномъ во 2-й степени есть 1, коэффиціентъ при неизвѣстномъ въ 1-й степени есть $-A$, а свободный членъ равенъ $\frac{B}{4}$ (§ 219). Значитъ, рѣшивъ уравненіе:

$$z^2 - Az + \frac{B}{4} = 0,$$

найдемъ x и y:

$$x = z_1 = \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{B}{4}} = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}.$$

$$y = z_2 = \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{B}{4}} = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}.$$

Слѣд.: $$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Отсюда видно, что **радикалъ $\sqrt{A + \sqrt{B}}$ можно представить въ видѣ суммы двухъ простыхъ радикаловъ только тогда, когда A есть число положительное и $A^2 - B$ есть точный квадратъ.**

Подобнымъ же образомъ выведемъ, что при тѣхъ же условіяхъ:

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

Замѣчаніе. Выведенныя нами равенства остаются вѣрными и тогда, когда разность A^2-B не есть точный квадратъ, и даже тогда, когда A и B—числа ирраціональныя; но тогда эти равенства не представляютъ практическаго интереса.

Примѣры:

1) $$\sqrt{10+\sqrt{51}}=\sqrt{\frac{10+7}{2}}+\sqrt{\frac{10-7}{2}}=\frac{\sqrt{34}+\sqrt{6}}{2};$$

2) $$\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{8-\sqrt{60}}=\sqrt{\frac{8+2}{2}}-\sqrt{\frac{8-2}{2}}=\sqrt{5}-\sqrt{3};$$

3) $$\sqrt{\frac{9}{11}+\frac{4}{11}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{9+\sqrt{32}}}{\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{\frac{9+7}{2}}+\sqrt{\frac{9-7}{2}}}{\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{8}+1}{\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{88}+\sqrt{11}}{11}$$

4) $$a_{2n}=\sqrt{2r^2-2r\sqrt{r^2-\frac{a^2_n}{4}}}=\sqrt{2r^2-\sqrt{4r^4-a_n^2r^2}}.$$

(Извѣстная геометрическая формула удвоенія числа сторонъ правильнаго вписаннаго многоугольника.)

Здѣсь $A=2r^2$, $B=4r^4-a^2_nb^2$; $\sqrt{A^2-B}=a_nr$; поэтому

$$a_{2n}=\sqrt{\frac{2r^2+a_nr}{2}}-\sqrt{\frac{2r^2-a_nr}{2}}=\sqrt{r\left(r+\frac{a_n}{2}\right)}-\sqrt{r\left(r-\frac{a_n}{2}\right)}.$$

240. Возвратное уравненіе 4-й степени. Возвратнымъ уравненіемъ вообще называется уравненіе, у котораго коэффиціенты, равноотстоящіе отъ начала и конца, одинаковы. Такимъ образомъ, возвратное уравненіе 4-й степени есть уравненіе вида:

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0.$$

Чтобы рѣшить такое уравненіе, раздѣлимъ обѣ его части на x^2 (мы имѣемъ право это сдѣлать, такъ какъ x не равно 0):

$$ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0$$

или $$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0.$$

Введемъ вспомогательное неизвѣстное y, опредѣляемое равенствомъ:

$$x+\frac{1}{x}=y;\ \text{тогда}\ x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2\ \text{и, слѣд.,}\ x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2;$$

подставивъ эти выраженія въ уравненіе, получимъ:

$$a(y^2-2)+by+c=0.$$

Рѣшивъ это квадратное уравненіе, найдемъ два значенія для y; пусть это будутъ: $y_1 = \alpha$ и $y_2 = \beta$; тогда

$$x + \frac{1}{x} = \alpha \text{ и } x + \frac{1}{x} = \beta,$$

и слѣд.

$$x^2 - \alpha x + 1 = 0 \text{ и } x^2 - \beta x + 1 = 0.$$

Изъ этихъ двухъ уравненій найдемъ 4 рѣшенія даннаго уравненія.

241. Уравненія, у которыхъ лѣвая часть разложена на множителей, а правая есть 0. Такъ какъ произведеніе можетъ равняться 0 только тогда, когда, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ сомножителей равенъ 0, то рѣшеніе уравненія вида: $ABC... = 0$ приводится къ рѣшенію уравненій болѣе низкихъ степеней: $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$...

Примѣры.

1) $ax^3 + bx^2 + cx = 0$. Представивъ уравненіе въ видѣ:

$$x(ax^2 + bx + c) = 0,$$

замѣтимъ, что оно распадается на два уравненія:

$$x = 0 \text{ и } ax^2 + bx + c = 0.$$

2) $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$. Это возвратное уравненіе 3-й степени можно представить такъ:

$$a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = 0.$$

Но $x^3 + 1 = x^3 + 1^3 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$; (§ 87, VI)

поэтому уравненіе можемъ написать такъ:

$$(x + 1)[a(x^2 - x + 1) + bx] = 0.$$

Слѣд., оно распадается на два уравненія:

$$x + 1 = 0 \text{ и } ax^2 - (a - b)x + a = 0.$$

Отсюда легко получимъ три значенія для x.

242. Зная одинъ корень уравненія, можемъ понизить его степень на 1. Пусть имѣемъ уравненіе $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + ... = 0$ и положимъ, что одинъ корень его извѣстенъ, напр., $x = a$. Въ такомъ случаѣ лѣвая часть уравненія дѣлится на $x - a$ (§ 83,a). Раздѣливъ на самомъ дѣлѣ, получимъ въ частномъ нѣкоторый многочленъ Q степени $(m - 1)$-й. Такъ какъ дѣлимое равно дѣли-

телю, умноженному на частное, то предложенное уравненіе можно представить такъ: $(x-a)Q=0$. Теперь очевидно, что уравненіе распадаетс на два: $x-a=0$ и $Q=0$. Послѣднее уравненіе есть $(m-1)$-й степени

Примѣръ. $x^3-15x^2+56x-60=0.$

Замѣтивъ, что уравненіе удовлетворяется при $x=10$, дѣлимъ его лѣвую часть на $x-10$; въ частномъ получаемъ x^2-5x+6; послѣ этого уравненіе представляемъ такъ:

$$(x-10)(x^2-5x+6)=0,$$

откуда:

$$x_1=10,\ x_2=2,\ x_3=3.$$

243. Упрощеніе двухчленнаго уравненія. Двучленнымъ уравненіемъ наз. уравненіе вида: $ax^m+b=0$; или что то же самое, вида $x^m+{}^b/_a=0$ [1]). Обозначивъ абсолютную величину дроби ${}^b/_a$ черезъ q, мы можемъ двучленное уравненіе написать: или $x^m+q=0$, или $x^m-q=0$. При помощи вспомогательнаго неизвѣстнаго эти уравненія всегда можно упростить, такъ, что свободный членъ у перваго обратится въ $+1$ а у второго въ -1. Дѣйствительно, положимъ, что $x=y\sqrt[m]{q}$ гдѣ $\sqrt[m]{q}$ есть ариѳметическій корень m-й степени изъ q тогда $x^m=qy^m$, уравненія примутъ видъ:

$$qy^m+q=0,\ \text{т.-е.}\ q(y^m+1)=0;\ \text{откуда:}\ y^m+1=0;$$

или $$qy^m-q=0,\ \text{т.-е.}\ q(y^m-1)=0;\ \text{откуда:}\ y^m-1=0.$$

Итакъ, рѣшеніе двучленныхъ уравненій приводится къ рѣшенію уравненій вида $y^m\pm1=0$. Рѣшеніе такихъ уравненій элементарными способами можетъ быть выполнено только при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ показателя m, напримѣръ при $m=3, 4, 5, 6, 8, 9$ и при нѣкоторыхъ другихъ. Общій пріемъ употребляемый при этомъ, состоитъ въ разложеніи лѣвой части уравненія на множителей, послѣ чего уравненіе приводится къ виду $ABC...=0$, разсмотрѣнному нами раньше.

244. Рѣшеніе двучленныхъ уравненій третьей степени. Эти уравненія слѣдующія:

$$x^3-1=0 \text{ и } x^3+1=0.$$

---

[1]) Когда двучленное уравненіе имѣетъ видъ $ax^m+bx^n=0$, гдѣ $m>n$ то его можно представить такъ: $x^n(ax^{m-n}+b)=0$ и, слѣд., оно распадается на два уравненія: $x=0$ и $ax^{m-n}+b=0$.

Замѣтимъ, что (§ 67, VI):

$$x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x-1)(x^2+x+1) \text{ и } x^3+1 = x^3+1^3 = (x+1)(x^2-x+1),$$

мы можемъ предложенныя уравненія написать такъ:

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0 \text{ и } (x-1)(x^2+x+1) = 0.$$

Значитъ, первое изъ нихъ имѣетъ корни уравненій:

$$x - 1 = 0 \text{ и } x^2 + x + 1 = 0,$$

а второе—корни уравненій:

$$x + 1 = 0 \text{ и } x^2 - x + 1 = 0.$$

Рѣшивъ ихъ, находимъ, что уравненіе $x^3 - 1 = 0$ имѣетъ слѣдующіе три корня:

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{-1+\sqrt{-3},}{2},\ x_3 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

изъ которыхъ одинъ вещественный, а два мнимыхъ; уравненіе $x^3 + 1 = 0$ имѣетъ три корня:

$$x_1 = -1, x_2 = \frac{1+\sqrt{-3}}{2},\ x_3 = \frac{1-\sqrt{-3}}{2},$$

изъ которыхъ также одинъ вещественный, а два мнимыхъ.

245. Другіе примѣры двучленныхъ уравненій, разрѣшимыхъ элементарно. 1) $x^4 - 1 = 0$; это уравненіе можно написать такъ:

$$(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0.$$

Слѣд., оно распадается на два: $x^2 - 1 = 0$ и $x^2 + 1 = 0$; отсюда находимъ

$$x = \pm 1 \text{ и } x = \pm\sqrt{-1}.$$

2) $x^4 + 1 = 0$; уравненіе можно написать такъ:

$$(x^2+1)^2 - 2x^2 = 0 \text{ или } (x^2+1-x\sqrt{2})(x^2+1+x\sqrt{2}) = 0.$$

Слѣд., оно распадается на 2 уравненія второй степени.

3) $x^5 - 1 = 0$; уравненіе можно написать такъ:

$$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) = 0.$$

Слѣд., оно распадается на два уравненія, изъ которыхъ послѣднее есть возвратное уравненіе 4-й степени, рѣшаемое элементарно.

4) $x^5 + 1 = 0$; уравненіе можно написать такъ:

$$(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1) = 0.$$

Слѣд., оно распадается на два уравненія, изъ которыхъ послѣднее есть возвратное 4-й степени.

Подобнымъ же образомъ рѣшаются уравненія

$$x^6 \pm 1 = 0, x^8 \pm 1 = 0, x^9 \pm 1 = 0$$

и нѣкоторыя другія.

246. Различныя значенія корня. Рѣшеніе двучленныхъ уравненій m-й степени имѣетъ тѣсную связь съ нахожденіемъ всѣхъ значеній корня той же степени изъ даннаго числа. Въ самомъ дѣлѣ, если буквою x обозначимъ какое угодно значеніе $\sqrt[m]{A}$, то, согласно опредѣленію корня, мы будемъ имѣть: $x^m = A$ и, слѣд., $x^m - A = 0$; такимъ образомъ, каждое рѣшеніе этого двучленнаго уравненія представляетъ собою m-й корень изъ числа A; слѣд., сколько различныхъ рѣшеній имѣетъ двучленное уравненіе, столько различныхъ значеній имѣетъ $\sqrt[m]{A}$.

Докажемъ, напр., что кубичный корень изъ всякаго числа имѣетъ три различныхъ значенія.

Найти всѣ значенія $\sqrt[3]{A}$ значитъ, другими словами, рѣшить уравненіе $x^3 - A = 0$. Обозначивъ ариѳметическое значеніе $\sqrt[3]{A}$ черезъ q (оно можетъ быть только одно, § 163, III), введемъ вспомогательное неизвѣстное y, связанное съ x такимъ равенствомъ: $x = qy$. Тогда уравненіе $x^3 - A = 0$ представится такъ: $q^3y^3 - A = 0$; но $q^3 = A$; поэтому $q^3y^3 - A = A\ (y^3 - 1)$; слѣд., уравненіе окончательно приметъ видъ: $y^3 - 1 = 0$. Мы видѣли, что это уравненіе имѣетъ три корня:

$$y_1 = 1,\ y_2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2},\ y_3 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

Каждое изъ этихъ значеній, удовлетворяя уравненію $y^3 = 1$ представляетъ собою кубичный корень изъ 1. Такъ какъ $x = qy$, то

$$x_1 = q \cdot 1,\ x_2 = q \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2},\ x_3 = q \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

Это и будутъ три значенія $\sqrt[3]{A}$; одно изъ нихъ вещественное, а два мнимыя. Всѣ они получатся, если ариѳметическое

значеніе кубичнаго корня изъ A умножимъ на каждое изъ трехъ значеній кубичнаго корня изъ 1. Напр., кубичный корень изъ 8, ариѳметическое значеніе котораго есть 2, имѣетъ слѣдующія три значенія:

$$2;\quad 2.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=-1+\sqrt{-3};\quad 2.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=-1-\sqrt{-3}.$$

Замѣчаніе. Въ высшей алгебрѣ доказывается, что двучленное уравненіе $x^m-A=0$ имѣетъ m различныхъ корней; вслѣдствіе этого $\sqrt[m]{A}$ имѣетъ m различныхъ значеній, при чемъ, если m число четное и A отрицательное, то всѣ эти значенія мнимыя; если m четное и A положительное, то два значенія вещественныя (изъ нихъ одно положительное, другое отрицательное, съ одинаковой абсолютной величиной); наконецъ, если m нечетное число, то изъ всѣхъ значеній $\sqrt[m]{A}$ только одно — вещественное.

247. Трехчленное уравненіе. Такъ наз. уравненіе вида: $ax^{2n}+bx^n+c=0$, т.-е. уравненіе, содержащее 3 члена: одинъ свободный (c), другой съ неизвѣстнымъ въ нѣкоторой степени n и третій съ неизвѣстнымъ въ степени, которой показатель есть $2n$. Рѣшеніе такого уравненія посредствомъ введенія вспомогательнаго неизвѣстнаго приводится къ рѣшенію квадратнаго и двучленнаго уравненій. Въ самомъ дѣлѣ, если положимъ, что $x^n=y$, то тогда $x^{2n}=(x^n)^2=y^2$ и уравненіе приметъ видъ:

$$ay^2+by+c=0;$$

откуда: $$y_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad y_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

и, слѣд., $$x^n=y_1 \text{ и } x^n=y_2.$$

Рѣшивъ эти двучленныя уравненія, найдемъ всѣ значенія x.

Примѣръ. Рѣшить уравненіе $x^6-9x^3+8=0$.

$$x^3=y;\ y^2-9y+8=0,\ y=\frac{9}{2}\pm\sqrt{\frac{81}{4}-8}=\frac{9\pm7}{2};$$

$$y_1=8;\ y_2=1;\ \text{слѣд.},\ x^3=8 \text{ и } x^3=1.$$

Рѣшимъ эти двучленныя уравненія:

$$x_1=2;\ x_2=-1+\sqrt{-3};\ x_3=-1-\sqrt{-3};$$

$$x_4=1;\ x_5=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2};\ x_6=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

248. Уравненія, сходныя съ трехчленными. Подобно трехчленнымъ, рѣшаются также уравненія вида:

$$aQ^2+bQ+c=0 \text{ и } aQ^4+bQ^2+c=0,$$

если Q есть такое выраженіе, содержащее x, которое, будучи приравнено какому-нибудь данному числу, составитъ уравненіе, разрѣшимое элементарно. Въ самомъ дѣлѣ, замѣнивъ въ данныхъ уравненіяхъ Q на y, получимъ квадратное или биквадратное уравненіе относительно y. Найдя всѣ значенія y и подставивъ каждое изъ нихъ въ ур $Q=y$, найдемъ изъ этого уравненія всѣ значенія x.

Примѣръ. $(x^2-5x+11)^2-12(x^2-5x+11)35=0.$

Положивъ $x^2-5x+11=y$, получимъ: $y^2-12y+35=0$,

откуда: $y_1=7,\ y_2=5,$

слѣд., $x^2-5x+11=7$ и $x^2-5x+11=5.$

Рѣшивъ эти уравненія, находимъ: $x_1=4,\ x_2=1,\ x_3=3,\ x_4=2.$

249. Введеніе вспомогательныхъ неизвѣстныхъ. Иногда уравненіе удается рѣшить посредствомъ введенія двухъ или болѣе вспомогательныхъ неизвѣстныхъ; въ такомъ случаѣ данное уравненіе приводится къ системѣ уравненій съ вспомогательными неизвѣстными.

Примѣръ. $(x+a)^4+(x+b)^4=c.$

Положимъ, что $x+a=y,\ x+b=z$; тогда рѣшеніе даннаго уравненія сводится къ рѣшенію такой системы:

$$y^4+z^4=c,\ y-z=a-b$$

Чтобы рѣшить эту систему, возвысимъ второе уравненіе въ 4-ю степень и вычтемъ изъ него первое; тогда получимъ:

$$-4y^3z+6y^2z^2-4yz^3=(a-b)^4-c$$

или

$$2yz(2y^2-3yz+2z^2)=c-(a-b)^4$$

т.-е.

$$2yz[2(y-z)^2+yz]=c-(a-b)^4.$$

Но $y-z=a-b$; подставивъ, найдемъ:

$$2yz[2(a-b)^2+yz]=c(a-b)^4.$$

Изъ этого уравненія опредѣлимъ yz; зная yz и $y-z$, легко затѣмъ найдемъ y и z.

ГЛАВА VII.

Нѣкоторыя замѣчанія объ алгебраическихъ уравненіяхъ.

250. Общій видъ всякаго алгебраическаго уравненія. Мы видѣли (§ 117), что уравненіе, содержащее неизвѣстное въ знаменателяхъ, можетъ быть приведено къ цѣлому виду. Далѣе мы знаемъ

(§§ 234, 235), что уравненіе, содержащее неизвѣстное подъ знакомъ радикала, можетъ быть приведено къ раціональному виду. Подобно этому можемъ сказать, что всякое уравненіе, въ которомъ неизвѣстное соединено съ данными числами посредствомъ конечнаго числа 6-ти алгебраическихъ дѣйствій (сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, возвышенія въ степень и извлеченія корня [1]), можетъ быть приведено къ такому цѣлому и раціональному виду:

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Kx + L = 0,$$

гдѣ коэффиціенты A, B, $C \ldots K$ и L суть постоянныя вещественныя или комплексныя числа, а m есть показатель степени уравненія. Нѣкоторые коэффиціенты въ частныхъ случаяхъ могутъ равняться 0.

Уравненіе такого вида наз. **алгебраическимъ**. Алгебраическія уравненія степени выше 2-й наз. уравненіями высшихъ степеней.

251. Нѣкоторыя свойства алгебраическаго уравненія. Уравненія высшихъ степеней составляютъ предметъ высшей алгебры. Элементарная же разсматриваетъ только нѣкоторые частные случаи этихъ уравненій.

Высшая алгебра устанавливаетъ слѣдующую важную истину: **всякое алгебраическое уравненіе съ вещественными коэффиціентами имѣетъ вещественный или комплексный корень** (Теорема Гаусса [2]) (1799). Допустивъ эту истину (доказательство которой въ элементарной алгебрѣ было бы затруднительно), не трудно показать, что

алгебраическое уравненіе имѣетъ столько корней, вещественныхъ или комплексныхъ, сколько единицъ въ показателѣ его степени.

Дѣйствительно, согласно теоремѣ Гаусса, уравненіе:

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Kx + L = 0 \qquad (1)$$

имѣетъ вещественный или комплексный корень; пусть этотъ корень будетъ α. Тогда многочленъ, стоящій въ лѣвой части уравненія (1), долженъ дѣлиться на $x - \alpha$ (§ 83,a). Если сдѣлаемъ дѣленіе, то въ частномъ получимъ многочленъ степени $m - 1$, у котораго первый коэффиціентъ будетъ A. Обозначивъ другіе его коэффиціенты соотвѣтственно буквами: B_1, $C_1 \ldots K_1$ и, принявъ во вниманіе, что дѣлимое равно дѣлителю, умноженному на частное, можемъ представить уравненіе (1) такъ:

$$(x - \alpha)\,(Ax^{m-1} + B_1x^{m-2} + C_1x^{m-3} + \ldots + K_1) = 0. \qquad (2)$$

Приравнявъ 0 многочленъ, стоящій во вторыхъ скобкахъ, получимъ новое уравненіе, которое, по той же теоремѣ, должно имѣть нѣкоторый корень β; вслѣдствіе этого лѣвая его часть можетъ быть разложена на два множителя: $x - \beta$ и многочленъ степени $m - 2$, у котораго первый коэффиціентъ попрежнему будетъ A. Поэтому уравненіе (1) можно переписать такъ:

$$(x - \alpha)\,(x - \beta)\,(Ax^{m-2} + B_2x^{m-3} + \ldots) = 0. \qquad (3)$$

---

[1]) Въ предположеніи, что при возвышеніи въ степень и при извлеченіи корня неизвѣстное не входитъ ни въ показателя степени, ни въ показателя корня.

[2]) Карлъ Фридрихъ Гауссъ—знаменитый нѣмецкій математикъ (1777—1855).

Продолжая эти разсужденія далѣе, дойдемъ, наконецъ, до того, что многочленъ, заключенный въ послѣднихъ скобкахъ, будетъ 2-й степени, при чемъ первый его коэффиціентъ останется A. Разложивъ этотъ трехчленъ на множителей (§ 220), приведемъ уравненіе (1) окончательно къ виду:

$$A(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ \dots\ (x-\lambda)=0, \qquad (4)$$

гдѣ всѣхъ разностей: $x-\alpha$, $x-\beta\dots$ будетъ m. Очевидно, что ур. (4) обращается въ тождество при каждомъ изъ значеній: $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma\dots$ $x=\lambda$ и не удовлетворяется никакими иными значеніями x (если $A\neq 0$); значитъ, уравненіе (1) имѣетъ m корней α, β, $\gamma\dots\lambda$. Въ частныхъ случаяхъ нѣкоторые и даже всѣ корни могутъ оказаться одинаковыми.

Полезно замѣтить еще слѣдующія истины, доказываемыя въ высшей алгебрѣ.

Сумма корней всякаго алгебраическаго уравненія

$$Ax^m+Bx^{m-1}+\ \dots\ +Kx+L=0$$

равна $-{}^B/_A$, а произведеніе корней равно ${}^L/_A$ (примѣромъ можетъ служить квадратное уравненіе).

Если алгебраическое уравненіе съ вещественными коэффиціентами имѣетъ комплексные корни, то число этихъ корней четное (примѣромъ можетъ служить биквадратное уравненіе).

Если алгебраическое уравненіе съ вещественными коэффиціентами имѣетъ n корней вида $p+qi$, оно имѣетъ n корней вида $p-qi$ (примѣромъ можетъ служить биквадратное уравненіе, комплексные корни котораго всегда сопряженные), и такъ какъ:

$$[x-(p+qi)][x-(p-qi)]=[(x-p)-qi][(x-p)+qi]=$$
$$=(x-p)^2-q^2i^2=(x-p)^2+q^2=x^2-2px+(p^2+q^2),$$

то лѣвая часть уравненія содержитъ въ этомъ случаѣ n вещественныхъ множителей вида ax^2+bx+c.

Алгебраическое уравненіе нечетной степени съ вещественными коэффиціентами имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ вещественный корень.

Уравненія съ произвольными буквенными коэффиціентами степени не выше 4-й разрѣшены алгебраически, т.-е. для корней этихъ уравненій найдены общія формулы, составленныя изъ коэффиціентовъ уравненія посредствомъ алгебраическихъ дѣйствій.

Въ этомъ смыслѣ уравненія съ произвольными буквенными коэффиціентами степени выше 4-й не могутъ быть разрѣшены алгебраически (теорема Абеля[1]); однако, когда коэффиціенты уравненія какой угодно степени выражены числами, всегда есть возможность вычислить съ желаемой степенью приближенія всѣ его корни, какъ вещественные, такъ и мнимые. Указаніе способовъ такого вычисленія составляетъ важную часть предмета высшей алгебры.

---

[1] Норвежскій математикъ начала XIX столѣтія (1802—1829).

ГЛАВА VIII.

Система уравненій второй степени.

252. Нормальный видъ уравненія второй степени съ двумя неизвѣстными. Полное уравненіе второй степени съ 2 неизвѣстными x и y, послѣ раскрытія въ немъ скобокъ, освобожденія отъ знаменателей и отъ радикаловъ и приведенія подобныхъ членовъ, можетъ содержать въ себѣ только члены слѣдующихъ 6 видовъ:

члены 2-й степени:	члены 1-й степени:
содержащіе x^2	содержащіе x
" y^2	" y
" xy	

и членъ, не содержащій неизвѣстнаго (членъ нулевой степени).

Перенеся всѣ члены уравненія въ одну его лѣвую часть, мы приведемъ уравненіе къ такому **нормальному виду**:

$$ax^2 + bxy + cx^2 + dx + ey + f = 0,$$

гдѣ коэффиціенты a, b, c, d, e, f суть данныя алгебраическія числа, положительныя или отрицательныя; нѣкоторыя изъ нихъ могутъ равняться **0**.

Одно уравненіе съ двумя неизвѣстными допускаетъ безчисленное множество рѣшеній, т. е. принадлежитъ къ числу неопредѣленныхъ (см. § 121).

253. Система двухъ уравненій, изъ которыхъ одно первой, а другое второй степени. Общій видъ такой системы слѣдующій:

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \\ mx + ny = p. \end{cases}$$

Ее легко рѣшить способомъ подстановки. Для этого опредѣлимъ изъ того уравненія, которое первой степени, какое-нибудь одно неизвѣстное въ зависимости отъ другого, напр., y въ зависимости отъ x, и вставимъ полученное выраженіе въ уравненіе

второй степени; тогда вмѣсто данной системы получимъ такую равносильную систему:

$$y=\frac{p-mx}{n};\; ax^2+bx\cdot\frac{p-mx}{n}+c\left(\frac{p-mx}{n}\right)^2+dx+e\cdot\frac{p-mx}{n}+f=0.$$

Второе уравненіе есть квадратное съ однимъ неизвѣстнымъ x. Рѣшивъ его, найдемъ для x два значенія: x_I и x_{II}, соотвѣтственно которымъ изъ перваго уравненія получимъ два значенія для другого неизвѣстнаго: y_I и y_{II}. Такимъ образомъ, предложенная система имѣетъ двѣ пары рѣшеній (x_I, y_I) и (x_{II}, y_{II}).

Примѣръ. $\begin{cases} x^2-4y^2+x+3y=1 \;\ldots \text{ ур. 2-й степ.} \\ 2x-y=1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ ур. 1-й степ.} \end{cases}$

Изъ второго уравненія находимъ: $y=2x-1$. Подставляемъ это выраженіе вмѣсто y въ первое уравненіе:

$$x^2-4(2x-1)^2+x+3(2x-1)=1.$$

Рѣшаемъ это уравненіе:

$$x^2-4(4x^2-4x+1)+x+6x-3-1=0$$

$$x^2-16x^2+16x-4+x+6x-3-1=0$$

$$-15x^2+23x-8=0;\quad 15x^2-23x+8=0.$$

$$x=\frac{23\pm\sqrt{23^2-4.15.8}}{2.15}=\frac{23\pm\sqrt{529-480}}{30}=\frac{23\pm\sqrt{49}}{30}$$

$$x_I=\frac{23+7}{30}=1\qquad x_{II}=\frac{23-7}{30}=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}.$$

Послѣ этого изъ уравненія $y=2x-1$ находимъ:

$$y_I=2.1-1=1\qquad y_{II}=2\cdot\frac{8}{15}-1=\frac{1}{15}.$$

Такимъ образомъ, данная система уравненій имѣетъ двѣ пары рѣшеній:

$$1)\;\begin{cases} x_I=1 \\ y_I=1 \end{cases}\qquad 2)\;\begin{cases} x_{II}=\dfrac{8}{15} \\ y_{II}=\dfrac{1}{15}. \end{cases}$$

254. Искусственные пріемы. Указанный пріемъ примѣнимъ всегда, коль скоро одно уравненіе первой степени но въ нѣкоторыхъ случаяхъ удобнѣе пользоваться искусственными пріемами, для которыхъ нельзя указать общаго правила.

Примѣръ I. $x+y=a; \quad xy=b.$

Первый способъ. Такъ какъ предложенныя уравненія даютъ сумму и произведеніе неизвѣстныхъ, то (§ 219) x и y можно разсматривать, какъ корни квадратнаго уравненія:

$$z^2-az+b=0;$$

откуда: $$z_I=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}; \quad z_{II}=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}.$$

Одинъ изъ этихъ корней надо принять за x, другой за y.

Второй способъ. Возвысимъ первое уравненіе въ квадратъ и вычтемъ изъ него учетверенное второе [1]):

$$\begin{array}{r} x^2+2xy+y^2=a^2 \\ -4xy=-4b \\ \hline x^2-2xy+y^2=a^2-4b \end{array}$$

т.-е. $(x-y)^2=a^2-4b$; откуда $x-y=\pm\sqrt{a^2-4b}$.

Теперь имѣемъ систему:

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=\pm\sqrt{a^2-4b} \end{cases}$$

Сложивъ и вычтя эти уравненія, получимъ:

$$2x=a\pm\sqrt{a^2-4b}; \quad 2y=a\mp\sqrt{a^2-4b}.$$

Откуда: $$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}, \quad y=\frac{a\mp\sqrt{a^2-4b}}{2},$$

Замѣтимъ, что здѣсь знаки $\pm$ и $\mp$ находятся **въ соотвѣтствіи** другъ съ другомъ, т.-е. верхнему знаку въ формулѣ для x соотвѣтствуетъ верхній знакъ въ формулѣ для y и нижнему знаку въ первой формулѣ соотвѣтствуетъ нижній знакъ второй формулы.

---

[1]) Подобныя фразы употребляются часто, ради краткости, вмѣсто „возвысимъ обѣ части уравненія въ квадратъ“, „умножимъ обѣ части уравненія на 4“ и т. п.

Такимъ образомъ, данная система имѣетъ двѣ пары рѣшеній:

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \\ y_I = \dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_{II} = \dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2} \\ y_{II} = \dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \end{cases}$$

Вторая пара отличается отъ первой только тѣмъ, что значеніе x первой пары служитъ значеніемъ y второй пары, и наоборотъ. Это можно было бы предвидѣть *a priori* (заранѣе), такъ какъ данныя уравненія таковы, что они не измѣняются отъ замѣны x на y, а y на x. Замѣтимъ, что такія уравненія называются **симметричными**.

Примѣръ 2. $x-y=a,\ xy=b.$

Первый способъ. Представивъ уравненія въ видѣ:

$$x+(-y)=a, \quad x(-y)=-b,$$

замѣчаемъ, что x и $-y$ суть корни такого квадратнаго уравненія

$$z^2-az-b=0,$$

слѣд.: $x=z_I=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}$; $y=-z_{II}=-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}\right)$

(или $x=z_{II}$, $y=-z_I$).

Второй способъ. Возвысимъ первое уравненіе въ квадратъ и сложимъ его съ учетверенпымъ вторымъ:

$$(x+y)^2=a^2+4b; \text{ откуда: } x+y=\pm\sqrt{a^2+4b}.$$

Теперь имѣемъ систему:

$$\begin{cases} x+y=\pm\sqrt{a^2+4b}. \\ x-y=a. \end{cases}$$

Сложивъ и вычтя эти уравненія, найдемъ:

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}, \quad y=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2},$$

(здѣсь знаки $\pm$ находятся въ соотвѣтствіи).

Примѣръ 3. $x+y=a,\ x^2+y^2=b.$

Возвысивъ первое уравненіе въ квадратъ и вычтя изъ него второе, получимъ:

$$2xy=a^2-b,\quad \text{откуда: } xy=\frac{a^2-b}{2}.$$

Теперь вопросъ приводится къ рѣшенію системы:

$$x+y=a,\quad xy=\frac{a^2-b}{2}.$$

которую мы уже разсмотрѣли въ примѣрѣ первомъ.

255. Система двухъ уравненій, изъ которыхъ каждое — второй степени. Такая система въ общемъ видѣ не разрѣшается элементарно, такъ какъ она приводится къ полному уравненію 4-й степени.

Въ самомъ дѣлѣ, въ общемъ видѣ эта система представляется такъ:

$$\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \\ a'x^2+b'xy+c'y^2+d'x+e'y+f'=0. \end{cases}$$

Чтобы исключить одно неизвѣстное, достаточно было бы изъ какого либо уравненія опредѣлить одно неизвѣстное въ зависимости отъ другого и вставить полученное выраженіе во второе уравненіе; но тогда пришлось бы освобождать уравненіе отъ знаковъ радикала. Можно поступить проще: умножимъ первое уравненіе на c', а второе на c, и вычтемъ почленно одно изъ другого; тогда исключится y^2, и уравненіе приметъ видъ:

$$mx^2+nxy+px+qy+r=0,$$

или

$$mx^2+(nx+q)y+px+r=0.$$

Откуда:

$$y=-\frac{mx^2+px+r}{nx+q}.$$

Вставивъ это значеніе въ одно изъ данныхъ уравненій и освободивъ полученное уравненіе отъ знаменателей, будемъ имѣть въ окончательномъ результатѣ полное уравненіе 4-й степени, которое въ общемъ видѣ элементарными способами не разрѣшается.

Разсмотримъ **нѣкоторые частные случаи**, которые можно рѣшить элементарнымъ путемъ.

Примѣръ 1. $x^2+y^2=a,\ xy=b.$

Первый способъ (способъ подстановки). Изъ второго уравненія опредѣлимъ одно неизвѣстное въ зависимости отъ дру-

гого, напр., $x = {}^b/_y$. Вставимъ это значеніе въ первое уравненіе и освободимся отъ знаменателя; тогда получимъ биквадратное уравненіе $y^4 - ay^2 + b^2 = 0$. Рѣшивъ его, найдемъ для y четыре значенія. Вставивъ каждое изъ нихъ въ формулу, выведенную ранѣе для x, найдемъ четыре соотвѣтствующія значенія для x.

Второй способъ. Сложивъ первое уравненіе съ удвоеннымъ вторымъ, получимъ:

$$x^2 + y^2 + 2xy = a + 2b, \text{ т.-е. } (x + y)^2 = a + 2b.$$

Откуда: $$x + y = \pm \sqrt{a + 2b}. \qquad (1)$$

Вычтя изъ перваго уравненія удвоенное второе, найдемъ:

$$x^2 + y^2 - 2xy = a - 2b, \text{ т.-е. } (x - y)^2 = a - 2b.$$

Откуда: $$x - y = \pm \sqrt{a - 2b}, \qquad (2)$$

Не трудно видѣть, что знаки $\pm$ въ уравненіяхъ (1) и (2) не находятся въ соотвѣтствіи, и потому вопросъ приводится къ рѣшенію слѣдующихъ 4 системъ первой степени:

$$1) \begin{cases} x + y = \sqrt{a + 2b} \\ x - y = \sqrt{a - 2b} \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} x + y = \sqrt{a + 2b} \\ x - y = -\sqrt{a - 2b} \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + y = -\sqrt{a + 2b} \\ x - y = \sqrt{a - 2b} \end{cases} \qquad 4) \begin{cases} x + y = -\sqrt{a + 2b} \\ x - y = -\sqrt{a - 2b} \end{cases}$$

Каждая изъ нихъ рѣшается весьма просто, посредствомъ сложенія и вычитанія уравненій.

Третій способъ. Возвысивъ второе уравненіе въ квадратъ, получимъ слѣдующую систему:

$$x^2 + y^2 = a, \quad x^2y^2 = b^2.$$

Отсюда видно, что x^2 и y^2 суть корни квадратнаго уравненія:

$$z^2 - az + b^2 = 0.$$

Слѣд.: $x^2 = z_I = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$, $y^2 = z_{II} = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$

и $x = \pm \sqrt{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}}$, $y = \pm \sqrt{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}}$

(здѣсь знаки $\pm$ не находятся въ соотвѣтствіи).

Примѣръ 2. $x^2 - y^2 = a,\ xy = b.$

Способомъ подстановки легко приведемъ эту систему къ биквадратному уравненію. Вотъ еще искусственное рѣшеніе.

Возвысивъ второе уравненіе въ квадратъ, будемъ имѣть:

$$x^2 - y^2 = a,\ x^2y^2 = b^2$$

или $$x^2 + (-y^2) = a,\ x^2(-y^2) = -b^2.$$

Отсюда видно, что x^2 и $-y^2$ суть корни такого уравненія:

$$z^2 - az - b^2 = 0;$$

откуда: $z_I = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2},\quad z_{II} = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}.$

Одинъ изъ этихъ корней надо принять за x^2, другой за $-y^2$; послѣ этого найдемъ x и y.

Примѣръ 3. $\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = 0. \end{cases}$

Раздѣливъ второе уравненіе (однородное) на y^2, получимъ:

$$a'\left(\frac{x}{y}\right)^2 + b'\left(\frac{x}{y}\right) + c' = 0.$$

Рѣшивъ это квадратное уравненіе относительно $x/_y$, найдемъ два значенія: $x/_y = m$ и $x/_y = n$; откуда $x = my$ и $x = ny$. Подставимъ въ первое данное уравненіе на мѣсто x эти значенія; тогда получимъ квадратное уравненіе относительно y.

256. Система трехъ и болѣе уравненій второй степени, а также системы уравненій высшихъ степеней могутъ быть рѣшены элементарными способами только въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ посредствомъ искусственныхъ пріемовъ. Приведемъ нѣкоторые **примѣры**:

1) $\begin{cases} x(x+y+z) = a \\ y(x+y+z) = b \\ z(x+y+z) = c \end{cases}$ Сложивъ всѣ три уравненія, получимъ: $(x+y+z)^2 = a+b+c.$

Откуда: $x + y + z = \pm\sqrt{a+b+c}.$

Послѣ этого изъ данныхъ уравненій находимъ:

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{a+b+c}},\ y = \pm \frac{b}{\sqrt{a+b+c}},\ z = \pm \frac{c}{\sqrt{a+b+c}}$$

(знаки $\pm$ находятся въ соотвѣтствіи).

2) $yz = a,\ xz = b,\ xy = c.$

Перемноживъ всѣ уравненія почленно, получимъ: $x^2y^2z^2 = abc$, т.-е. $(xyz)^2 = abc$, откуда: $xyz = \pm\sqrt{abc}$. Раздѣливъ это почленно на данныя, найдемъ:

$$x = \pm \frac{\sqrt{abc}}{a},\ y = \pm \frac{\sqrt{abc}}{b},\ z = \pm \frac{\sqrt{abc}}{c}$$

(знаки $\pm$ находятся въ соотвѣтствіи)

ОТДѢЛЪ VI.

Неравенства и неопредѣленныя уравненія.

ГЛАВА I.

Неравенства.

(Повторить § 28.)

257. Неравенства и ихъ подраздѣленія. Два алгебраическія выраженія, соединенныя между собою знаками $>$ или $<$, составляютъ неравенство; эти алгебраическія выраженія наз. **частями** неравенства: лѣвая часть и правая часть.

Подобно равенствамъ, неравенства, содержащія буквы, бываютъ двоякаго рода: 1) неравенства **тождественныя**, вѣрныя при всякихъ численныхъ значеніяхъ буквъ, входящихъ въ нихъ, и 2) **неравенства, соотвѣтствующія уравненіямъ**, вѣрныя только при нѣкоторыхъ значеніяхъ буквъ (эти буквы наз. тогда **неизвѣстными** неравенства; онѣ, обыкновенно, берутся изъ послѣднихъ буквъ алфавита). Напр., неравенство

$$(1+a)^2 > 1+2a$$

вѣрно при всякихъ численныхъ значеніяхъ буквы a, отличныхъ отъ нуля, такъ какъ его лѣвая часть, равная всегда $1+2a+a^2$ превосходитъ правую часть на число a^2, которое всегда положительно (кромѣ случая $a=0$); неравенство же

$$3x+2 < x+10$$

вѣрно не при всякихъ численныхъ значеніяхъ x, а только при такихъ, которыя меньше 4.

Неравенства второго рода, подобно уравненіямъ, раздѣляются по числу неизвѣстныхъ и по степенямъ ихъ.

О двухъ неравенствахъ говорятъ, что они одинаковаго смысла, если одновременно въ обоихъ лѣвыя части или больше, или меньше правыхъ; въ противномъ случаѣ говорятъ, что неравенства противоположнаго смысла.

258. Два рода вопросовъ относительно неравенствъ. Относительно неравенствъ (какъ и равенствъ), содержащихъ буквы, могутъ быть предлагаемы вопросы двоякаго рода:

1) доказать тождественное неравенство, т.-е. обнаружить вѣрность его при всевозможныхъ значеніяхъ буквъ, или, по крайней мѣрѣ, при значеніяхъ, ограниченныхъ заданными напередъ условіями;

2) рѣшать неравенство, содержащее неизвѣстныя, т.-е. опредѣлить, между какими предѣлами должны заключаться численныя значенія неизвѣстныхъ, чтобы оно было вѣрно, т.-е. больше чего или меньше чего должны быть эти значенія неизвѣстныхъ.

Рѣшеніе вопросовъ того и другого рода основывается на нѣкоторыхъ свойствахъ неравенствъ, подобныхъ тѣмъ, которыя служатъ основаніемъ для рѣшенія уравненій.

259. Главнѣйшія свойства неравенствъ. Обозначая каждую часть неравенства одной буквой, мы можемъ главнѣйшія свойства неравенствъ выразить такъ:

1°. Если $a > b$, то $b < a$.

Дѣйствительно, если $a > b$, то это значитъ (§ 28), что разность $a - b$ число положительное; но въ такомъ случаѣ разность $b - a$ должна быть числомъ отрицательнымъ и потому $b < a$.

2°. Если $a > b$ и $b \geqslant c$, то $a > c$.

Дѣйствительно, если $a > b$, то разность $a - b$ число положительное: если $b \geqslant c$, то разность $b - c$ или равна 0, или есть число положительное. Но тогда сумма этихъ двухъ разностей:

$(a-b)+(b-c)$ должна быть числомъ положительнымъ. Сумма эта равна: $a-b+b-c=a-c$; если же разность $a-c$ число положительное, то $a>c$.

3°. **Если $a>b$ и $a_1\geqslant b_1$, то $a+a_1>b+b_1$.**

Дѣйствительно, при этихъ условіяхъ разность $a-b$ число положительное; а разность a_1-b_1 или равна 0, или есть число положительное; но тогда сумма $(a-b)+(a_1-b_1)$, равная разности $(a+a_1)-(b+b_1)$, должна быть числомъ положительнымъ; а это значитъ, что $a+a_1>b+b_1$.

Это свойство, благодаря тому, что второе изъ данныхъ неравенствъ $(a_1\geqslant b_1)$ соединено съ равенствомъ, распадается на 2 отдѣльныя свойства, которыя можно высказать такъ:

неравенства одинаковаго смысла можно почленно складывать

если къ обѣимъ частямъ неравенства придадимъ поровну, то знакъ неравенства не измѣнится;

4°. **Если $a>b$ и $a_1\leqslant b_1$, то $a-a_1>b-b_1$.**

Дѣйствительно, если $a>b$, то разность $a-b$ число положительное; съ другой стороны, если $a_1\leqslant b_1$, то, значитъ, $b_1\geqslant a_1$ и потому разность b_1-a_1 или равна 0, или есть число положительное; но тогда сумма этихъ разностей: $(a-b)+(b_1-a_1)$ равная $(a-a_1)-(b-b_1)$, должна быть числомъ положительнымъ; а это значитъ, что $a-a_1>b-b_1$.

Это свойство такъ же, какъ и предыдущее, благодаря двойному знаку $\leqslant$ во второмъ неравенствѣ, распадается на 2 отдѣльныя свойства, которыя можно высказать такъ:

изъ одного неравенства можно почленно вычесть другое неравенство противоположнаго смысла, оставивъ знакъ перваго неравенства;

если отъ обѣихъ частей неравенства отнимемъ поровну, то знакъ неравенства не измѣнится;

5°. **Если $a>b$ и m положительное число, то $am>bm$ и $\frac{a}{m}>\frac{b}{m}$.**

Дѣйствительно, если $a>b$, то разность $a-b$ число положительное, и потому произведенія этой разности на поло

жительныя числа m и $\frac{1}{m}$ также положительныя числа; но эти произведенія равны соотвѣтственно разностямъ $am-bm$ и $\frac{a}{m}-\frac{b}{m}$ слѣд., $am>bm$ и $\frac{a}{m}>\frac{b}{m}$.

Свойство это можно высказать такъ: **если обѣ части неравенства умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же положительное числ то знакъ неравенства не измѣнится.**

6°. Если $a>b$ и m отрицательное число, то $am<bm$ и $\frac{a}{m}<\frac{b}{m}$

Въ самомъ дѣлѣ, при данныхъ условіяхъ произведенія $(a-b)$ и $(a-b)\frac{1}{m}$, какъ произведенія положительнаго числа на отрицательное, должны быть числами отрицательными; но произведені эти равны соотвѣтственно $am-bm$ и $\frac{a}{m}-\frac{b}{m}$; значитъ, $am<b$ и $\frac{a}{m}<\frac{b}{m}$.

Свойство это можно высказать такъ: **если обѣ части неравенства умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же отрицательное числ то знакъ неравенства измѣнится на обратный.**

Въ частности знакъ неравенства измѣняется на обратны при умноженіи частей неравенства на -1, т.-е. при перемѣн знаковъ передъ членами неравенства на противоположные; так

$$\begin{array}{r|r|r} 7>2 & 7>-10 & -2>-5 \\ -7<-2 & -7<+10 & +2<+5. \end{array}$$

О неравенствахъ, у которыхъ части — числа положительны можно высказать еще слѣдующія, почти очевидныя, истины

1°. Если $a>b$ и $c\geqslant d$, то $ac>bd$;

2°. Если $a>b$, то $a^2>b^2$, $a^3>b^3$ и т. д.

3°. Если $a>b$, то $\sqrt{a}>\sqrt{b}$, $\sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b}$, и т. д. (здѣсь зн комъ радикала обозначено ариѳметическое значеніе корня).

4°. Если $a>b$ и $c<d$, то $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.

260. Равносильныя неравенства. Неравенства, содержащія одни и тѣ же неизвѣстныя, наз. **равносильными**, если они удовлетворяются одними и тѣми же значеніями этихъ неизвѣстныхъ; такъ, 2 неравенства: $8x+2<x+10$ и $3x<x+8$ равносильны, такъ какъ оба они удовлетворяются значеніями x, меньшими 4, и только этими значеніями.

Относительно равносильности неравенствъ докажемъ теоремы, весьма сходныя съ подобными же теоремами относительно равносильности уравненій (§§ 112, 114).

261. Теорема I. Если къ обѣимъ частямъ неравенства (содержащаго неизвѣстныя) прибавимъ или отъ нихъ отнимемъ одно и то же число, то получимъ новое неравенство, равносильное первому.

Обозначимъ лѣвую часть неравенства, содержащаго неизвѣстныя, одною буквою A и правую часть — другою буквою B, и пусть m есть какое угодно число; докажемъ, что два неравенства:

$$A>B \quad (1) \qquad A+m>B+m \quad (2)$$

равносильны. Положимъ, что первое неравенство удовлетворяется при нѣкоторыхъ значеніяхъ буквъ. Это значитъ, что при этихъ значеніяхъ численная величина A дѣлается больше численной величины B; но тогда при тѣхъ же значеніяхъ буквъ и численная величина суммы $A+m$ сдѣлается больше численной величинѣ суммы $B+m$, такъ какъ если къ обѣимъ частямъ неравенства придадимъ поровну, то знакъ неравенства не измѣнится. Значитъ, всякое рѣшеніе неравенства (1) принадлежитъ и неравенству (2).

Обратно, если при нѣкоторыхъ значеніяхъ буквъ численная величина суммы $A+m$ дѣлается больше численной величины суммы $B+m$, то для тѣхъ же значеній буквъ и численная величина A сдѣлается больше численной величины B (если отъ обѣихъ частей неравенства отнимемъ поровну, то...); слѣд., всѣ рѣшенія неравенства (2) удовлетворяютъ и неравенству (1); значитъ, эти неравенства равносильны.

Переходя отъ неравенства (2) къ неравенству (1), мы замѣ-

чаемъ, что отъ обѣихъ частей неравенства можно отнять одно и то же число.

Замѣчаніе. Число, прибавляемое къ обѣимъ частямъ неравенства или отнимаемое отъ нихъ, можетъ быть дано въ видѣ какого-нибудь **буквеннаго выраженія**, при чемъ выраженіе это можетъ содержать въ себѣ и **неизвѣстныя**, входящія въ неравенство; нужно только, чтобы прибавляемое выраженіе при всѣхъ значеніяхъ неизвѣстныхъ, удовлетворяющихъ данному неравенству, представляло собою **опредѣленное число** (а не принимало бы, напр., вида $\frac{0}{0}$ или ∞).

Слѣдствіе. Любой членъ неравенства можно перенести изъ одной части въ другую съ противоположнымъ знакомъ.

Если, напр., имѣемъ неравенство: $A > B + C$, то, отнявъ отъ обѣихъ частей по C, получимъ: $A - C > B$.

262. Теорема 2. Если обѣ части неравенства (содержащаго неизвѣстныя) умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же положительное число, то получимъ новое неравенство, равносильное первому.

Докажемъ, что два неравенства:

$$A > B \quad (1) \quad \text{и} \quad Am > Bm \quad (2)$$

равносильны, если только m **положительное** число.

Пусть при нѣкоторыхъ значеніяхъ неизвѣстныхъ численная величина A дѣлается больше численной величины B; тогда при тѣхъ же значеніяхъ неизвѣстныхъ и численная величина произведенія Am сдѣлается больше численной величины произведенія Bm, такъ какъ отъ умноженія обѣихъ частей неравенства на положительное число, какъ мы знаемъ, знакъ неравенства не измѣняется. Значитъ всѣ рѣшенія неравенства (1) удовлетворяютъ и неравенству (2).

Обратно, если при нѣкоторыхъ значеніяхъ буквъ численная величина Am дѣлается больше численной величины Bm, то при тѣхъ же значеніяхъ буквъ и численная величина A сдѣлается больше численной величины B, такъ какъ отъ дѣленія обѣихъ

частей неравенства на положительное число знакъ неравенств не измѣняется.

Замѣчаніе. Положительное число, на которое, по доказанному, мы имѣемъ право умножить или раздѣлить обѣ част неравенства (не измѣняя его знака), можетъ быть дано въ вид **буквеннаго выраженія**, при чемъ это выраженіе можетъ содержат въ себѣ и неизвѣстныя, входящія въ неравенство. Но пр этомъ надо особо разсмотрѣть, при всѣхъ ли значеніяхъ букв входящихъ въ выраженіе, на которое мы умножаемъ или дѣлимъ обѣ части неравенства, это выраженіе остается **положительнымъ** числомъ.

Напр., умножимъ обѣ части неравенства $A > B$ на выраженіе $(x - 5)^2$:

$$A > B \quad (1) \qquad A(x-5)^2 > B(x-5)^2 \quad (2$$

Множитель $(x-5)^2$ остается положительнымъ числомъ пр всѣхъ значеніяхъ x, кромѣ одного: $x = 5$. Значитъ неравенства (1) и (2) равносильны въ томъ случаѣ, если первое из нихъ не удовлетворяется значеніемъ $x = 5$; въ противномъ ж случаѣ неравенство (1), удовлетворяясь всѣми рѣшеніями неравенства (2), имѣетъ еще свое особое рѣшеніе: $x = 5$ (это рѣшеніе, конечно, неравенству (2) не удовлетворяетъ).

Слѣдствіе. Если обѣ части неравенства содержатъ полож тельнаго общаго множителя, то на него можно сократить неравенств Напр., въ обѣихъ частяхъ неравенства:

$$(x-5)^2(x-1) > (x-5)^2(3-x)$$

есть общій множитель $(x-5)^2$. Этотъ множитель при $x = 5$ обращается въ 0, а при всѣхъ остальныхъ значеніяхъ x онъ есть числ положительное. Рѣшеніе $x = 5$ не удовлетворяетъ данному неравенству. Желая рѣшить, удовлетворяется ли оно при другихъ значеніяхъ x, мы можемъ сократить обѣ части неравенств на $(x-5)^2$, какъ на число положительное; послѣ сокращенія получимъ: $x - 1 > 3 - x$. Всѣ значенія x, удовлетворяющія этом неравенству, за исключеніемъ $x = 5$, удовлетворяютъ и данном неравенству.

263. Теорема 3. **Если обѣ части неравенства (содержащаго неизвѣстныя) умножимъ или раздѣлимъ на одно и то же отрицательное число и при этомъ перемѣнимъ знакъ неравенства на противоположный, то получимъ новое неравенство, равносильное первому.**

Эта теорема доказывается совершенно такъ же, какъ и теорема 2-я; надо только принять во вниманіе, что отъ умноженія или отъ дѣленія обѣихъ частей неравенства на отрицательное число знакъ неравенства измѣняется на противоположный.

По поводу этой теоремы можно высказать такое же замѣчаніе, какое было сдѣлано по отношенію къ теоремѣ 2-ой.

Слѣдствія. 1°. Перемѣнивъ у всѣхъ членовъ неравенства знаки на противоположные (т.-е. умноживъ обѣ его части на —1), мы должны измѣнить знакъ неравенства на противоположный.

2°. Нельзя умножать обѣ части неравенства на буквеннаго множителя, знакъ котораго неизвѣстенъ.

3°. Неравенство съ дробными членами можно привести къ цѣлому виду. Возьмемъ, напр., такое неравенство:

$$\frac{A}{B} > \frac{C}{D} \qquad (1)$$

Перенесемъ всѣ члены въ лѣвую часть и приведемъ ихъ къ общему знаменателю:

$$\frac{AD - BC}{BD} > 0. \qquad (2)$$

Если BD положительное число, то мы можемъ его отбросить не измѣняя знака неравенства, потому что отбросить BD все равно, что умножить на это число обѣ части неравенства. Отбросивъ BD, получимъ неравенство, не содержащее дробей

$$AD - BC > 0.$$

Если BD отрицательное число, то мы можемъ его отбросить, перемѣнивъ при этомъ знакъ неравенства на противоположный; тогда снова будемъ имѣть неравенство съ цѣлыми членами:

$$AD - BC < 0$$

Но если знакъ BD неизвѣстенъ (что бываетъ именно тогда, когда B и D содержатъ неизвѣстныя), то мы не можемъ умножить обѣ части неравенства на BD. Тогда разсуждаемъ такъ: чтобы дробь была положительна, необходимо и достаточно, чтобы у нея числитель и знаменатель были одновременно или положительны, или отрицательны. Слѣд., неравенство (2) удовлетворится при такихъ значеніяхъ буквъ, при которыхъ

$$\begin{cases} AD - BC > 0 \\ BD > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} AD - BC < 0. \\ BD < 0. \end{cases}$$

Такимъ образомъ, рѣшеніе неравенства (1) сводится къ рѣшенію системы двухъ неравенствъ, не содержащихъ знаменателей.

264. Доказательство неравенства. Нельзя установить какихъ-либо общихъ правилъ для обнаруженія вѣрности предложеннаго неравенства. Замѣтимъ только, что одинъ изъ пріемовъ состоитъ въ томъ, что предложенное неравенство преобразовываютъ въ другое, очевидное и затѣмъ, исходя изъ этого очевиднаго неравенства, путемъ логическихъ разсужденій доходятъ до предложеннаго. Приведемъ нѣкоторые примѣры.

1. Доказать, что среднее ариѳметическое двухъ неравныхъ положительныхъ чиселъ больше ихъ средняго геометрическаго,

т.-е. что

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab},$$

если a и b положительныя числа, неравныя другъ другу.

Предположимъ, что доказываемое неравенство вѣрно. Въ такомъ случаѣ будутъ вѣрны и слѣдующія неравенства:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > \left(\sqrt{ab}\right)^2; \quad \frac{a^2+2ab+b^2}{4} > ab; \quad a^2+2ab+b^2 > 4ab;$$

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0; \quad (a-b)^2 > 0.$$

Очевидно, что послѣднее неравенство вѣрно для всякихъ неравныхъ значеній a и b, какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ. Изъ этого однако нельзя еще сразу заключить, что и доказываемое неравенство вѣрно; надо еще убѣдиться, что изъ послѣдняго неравенства можно получить, какъ слѣдствія, всѣ предыдущія. Просматривая эти неравенства отъ послѣдняго къ первому, видимъ, что всѣ они равносильны другъ другу, если добавить ограниченіе, что буквы a и b должны теперь означать **только положительныя** числа, такъ какъ если одна изъ этихъ **буквъ—отрицательное число,** то $\sqrt{ab}$ будетъ мнимое число, а если обѣ буквы—отрицательныя числа, то $\frac{a+b}{2}$ будетъ отрицательное число, а $\sqrt{ab}$

—число положительное, а отрицательное число не можетъ быть больше положительнаго [1]).

II. Доказать, что величина дроби:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n},$$

заключается между бо́льшею и меньшею изъ дробей:

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \quad \ldots \frac{a_n}{b_n},$$

если всѣ числа: $a_1, a_2 \ldots, b_1, b_2 \ldots$ — положительныя

Пусть a_1/b_1 будетъ дробь, которая не больше никакой изъ остальныхъ дробей, и a_n/b_n—дробь, которая не меньше никакой изъ остальныхъ дробей. Положимъ, что $a_1/b_1 = q_1$ и $a_n/b_n = q_n$. Тогда, согласно предположенію:

$$\frac{a_1}{b_1} = q_1, \frac{a_2}{b_2} \geqslant q_1, \frac{a_3}{b_3} \geqslant q_1 \quad \ldots \frac{a_n}{b_n} \geqslant q_1$$

$$\frac{a_n}{b_n} = q_n, \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \leqslant q_n \ \ldots \ \frac{a_2}{b_2} \leqslant q_n, \frac{a_1}{b_1} \leqslant q_n.$$

Отсюда: $\qquad a_1 = b_1 q_1,\ a_2 \geqslant b_2 q_1,\ a_3 \geqslant b_1 q_1 \ldots a_n \geqslant b_n q_1$

и $\qquad a_n = b_n q_n,\ a_{n-1} \leqslant b_{n-1} q_n \ldots a_2 \leqslant b_2 q_n,\ a_1 \leqslant b_1 q_n.$

Сложивъ почленно всѣ неравенства 1-й строки между собою и всѣ неравенства 2-й строки между собою, получимъ:

$$a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n \geqslant (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n) q_1$$

и

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \leqslant (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n) q_n.$$

Раздѣливъ обѣ части этихъ неравенствъ на положительное число $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$, окончательно найдемъ:

$$q_n \geqslant \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} \geqslant q_1,$$

что и требовалось доказать.

---

[1]) Полезно замѣтить, что предложенное неравенство становится наглядным, если придадимъ ему геометрическій смыслъ. На произвольной прямой отложимъ отрѣзокъ AB, содержащій a линейныхъ единицъ, и въ томъ же направленіи — отрѣзокъ BC, содержащій b такихъ же линейныхъ единицъ. На отрѣзкѣ AC, равномъ $a + b$, построимъ, какъ на діаметрѣ, полуокружность и изъ B возставимъ къ AC перпендикуляръ BD до пересѣченія съ полуокружностью. Тогда, какъ извѣстно изъ геометріи, BD есть средняя геометрическая между AB и BC, т.-е. $BD = \sqrt{ab}$; средняя ариѳметическая AB и BC равна, очевидно, радіусу. Такъ какъ хорда меньше діаметра, то BD меньше радіуса, если только BD не совпадетъ съ радіусомъ, т.-е. если $a \neq b$.

265. Рѣшеніе одного неравенства перво степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Общій вид неравенства первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ, пос упрощенія его, есть слѣдующій:

$$ax > b \text{ или } ax < b.$$

Если $a > 0$, то, раздѣливъ на a обѣ части неравенствъ, получимъ такія равносильныя неравенства:

$$x > \frac{b}{a} \text{ или } x < \frac{b}{a}.$$

Если же $a < 0$, то равносильныя неравенства будутъ (вспомнимъ, что при дѣленіи на отрицательное число знакъ неравенства измѣняется на противоположный):

$$x < \frac{b}{a} \text{ или } x > \frac{b}{a}.$$

Такимъ образомъ, одно неравенство первой степени дает для неизвѣстнаго одинъ предѣлъ [1]), ограничивающій значені неизвѣстнаго или сверху (верхній предѣлъ, когда $x < m$), ил снизу (нижній предѣлъ, когда $x > m$). Поэтому вопросы, рѣшеніе которыхъ приводится къ рѣшенію одного неравенств первой степени, принадлежатъ къ вопросамъ неопредѣленнымъ.

Примѣръ I. Рѣшить неравенство $2x(2x-5)-27<(2x+1)^2$.

Раскрываемъ скобки: $4x^2-10x-27 < 4x^2+4x+1$.

Переносимъ члены и дѣлаемъ приведеніе: $-14x < 28$.

Дѣлимъ обѣ части на -14: $x > -2$.

266. Два неравенства первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Иногда случается, что вопросъ приводится къ рѣшенію двухъ неравенствъ первой сте

---

[1]) Здѣсь слово „предѣлъ" не имѣетъ того значенія, которое придается ему, когда говорятъ о „предѣлѣ" перемѣннаго числа; здѣсь, какъ и въ нѣкоторыхъ другихъ случаяхъ (напр., въ выраженіи „предѣлъ погрѣшности"), слово „предѣлъ" означаетъ число, больше котораго или меньше котораго разсматриваемая величина не можетъ быть.

пени съ однимъ неизвѣстнымъ. Рѣшивъ ихъ, мы получимъ изъ каждаго по одному предѣлу для неизвѣстнагó. При этомъ надо различать слѣдующіе 3 случая:

1) **Предѣлы одинаковаго смысла** (т.-е. оба верхніе, или оба нижніе); тогда достаточно взять одинъ изъ нихъ. Если, напр., $x > 7$ и $x > 12$, то достаточно взять только $x > 12$, потому что если $x > 12$, то и подавно $x > 7$; или если, например̂ъ, $x < 5$ и $x < 8$, то достаточно положить, что $x < 5$, потому что тогда, и подавно, $x < 8$.

2) **Предѣлы противоположнаго смысла** (т.-е. одинъ верхній, другой нижній) и не противорѣчатъ другъ другу; напр., $x > 10$ и $x > 15$. Въ этомъ случаѣ для неизвѣстнаго можно брать только такія значенія, которыя заключены между найденными предѣлами.

3) **Предѣлы противорѣчатъ другъ другу**; напримѣръ, $x < 5$ и $x > 7$. Въ этомъ случаѣ неравенства, взятыя совмѣстно, невозможны.

Задача. Найти число, $\frac{3}{10}$ котораго, сложенныя съ 5, меньше половины искомаго числа, а 5 разъ взятое число меньше суммы 60 съ удвоеннымъ искомымъ числомъ.

Обозначивъ искомое число черезъ x, получимъ:

$$\frac{3}{10}x + 5 < \frac{1}{2}x \text{ и } 5x < 60 + 2x.$$

Откуда:

$$x > 25 \text{ и } x < 20.$$

Слѣд., задача невозможна.

267. Рѣшеніе неравенства второй степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Общій видъ такого неравенства, по упрощеніи его, есть слѣдующій:

$$ax^2 + bx + c \lesseqgtr 0.$$

Такъ какъ знакъ $<$ всегда можетъ быть приведенъ къ знаку $>$ (умноженіемъ обѣихъ частей неравенства на -1), то достаточно разсмотрѣть неравенство вида:

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

въ которомъ число a можетъ быть и положительнымъ, и отрицательнымъ.

Рѣшеніе этого неравенства основано на свойствѣ трехчлена ax^2+bx+ [illegible] разлагаться на множителей первой степени относительно x (§ 220). Од[illegible]

значивъ черезъ α и β корни этого трехчлена, мы можемъ замѣнить его про изведеніемъ $a(x-\alpha)(x-\beta)$, и тогда неравенство можно написать такъ:

$$a(x-\alpha)(x\beta)>0.$$

Разсмотримъ отдѣльно три слѣдующіе случая:

I. Корни вещественные неравные (что бываетъ тогда, когда $b^2-4ac>0$ (§ 223). Пусть $\alpha>\beta$. Если $a>0$, то произведеніе $a(x-\alpha)(x-\beta)$, оче видно, тогда положительно, когда каждая изъ разностей: $x-\alpha$ и $x-$ положительна или каждая отрицательна. Для этого достаточно, чтобы было больше α (тогда подавно x больше β), или же чтобы x было меньше (тогда подавно x меньше α). Слѣд., въ этомъ случаѣ неравенство получает рѣшеніе при $x>\alpha$ и также при $x<\beta$, т.-е. x должно быть или больш бо̀льшаго корня, или меньше меньшаго корня.

Если же $a<0$, то произведеніе $a(x-\alpha)(x-\beta)$ тогда положительн когда одна изъ разностей: $x-\alpha$ и $x-\beta$ отрицательна, а другая положи тельна. Для этого достаточно, чтобы x удовлетворяло неравенствам $\beta<x<\alpha$, т.-е. чтобы величина x заключалась между корнями трехчлена

II. Корни вещественные равные (что бываетъ тогда, когда $b^2-4ac=0$) Если $\alpha=\beta$, то неравенство принимаетъ видъ:

$$a(x-\alpha)^2>0.$$

Такъ какъ при всякомъ вещественномъ значеніи x, не равномъ α, числ $(x-\alpha)^2$ положительно, то при $a>0$ неравенство удовлетворяется всевоз можными вещественными значеніями x, за исключеніемъ $x=\alpha$, а при $a<$ это неравенство невозможно.

III. Корни мнимые (что бываетъ тогда, когда $b^2-4ac<0$).

Пусть $\alpha=m+\sqrt{-n}$; въ такомъ случаѣ $\beta=m-\sqrt{-n}$.

Тогда $\quad x-\alpha=x-(m+\sqrt{-n})=(x-m)-\sqrt{-n}$

и $\quad x-\beta=x-(m-\sqrt{-n})=(x-m)+\sqrt{-n}$.

Слѣд., $\quad a(x-\alpha)(x-\beta)=a[(x-m)^2-(\sqrt{-n})^2]=a[(x-m)^2+n]$,

и неравенство можно написать такъ: $a[(x-m)^2+n]>0$. Такъ какъ сумм $(x-m)^2+n$ при всякомъ вещественномъ значеніи x есть число положи тельное, то при $a>0$ неравенство удовлетворяется всевозможными значе ніями x, а при $a<0$ оно невозможно.

Примѣры. 1) Рѣшить неравенство: $x^2+3x-28>0$,

Корни трехчлена: $\alpha=4$, $\beta=-7$. Слѣд., неравенство можно написать

$$(x-4)[x-(-7)]>0.$$

Отсюда видно, что $x>4$ или $x<-7$.

2) Рѣшить неравенство: $4x^2-28x+49>0$.

Корни суть: $\alpha=\beta=3^1/_2$.

Поэтому $\quad 4(x-3^1/_2)^2>0.$

Откуда видно, что неравенство невозможно.

3) Рѣшить неравенство: $x^2 - 4x + 7 > 0$.

Корни суть $\alpha = 2 + \sqrt{-3}$; $\beta = 2 - \sqrt{-3}$; поэтому неравенство можно написать такъ: $(x - 2)^2 + 3 > 0$. Отсюда видно, что оно удовлетворяется всевозможными вещественными значеніями x.

ГЛАВА II.

Неопредѣленное уравненіе первой степени съ двумя неизвѣстными.

Задачи. 1) Сколько нужно взять монетъ въ 2 коп. и въ 3 коп., чтобы составилась сумма въ 25 коп.?

Вопросъ приводится къ рѣшенію въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ неопредѣленнаго уравненія $2x + 3y = 25$.

2) Въ обществѣ, состоящемъ изъ мужчинъ и женщинъ, былъ сдѣланъ въ складчину сборъ, при чемъ каждый мужчина платилъ по 5 рублей, а каждая женщина по 2 руб. Сколько было въ этомъ обществѣ мужчинъ и сколько женщинъ, если сборъ составилъ 100 руб.?

Вопросъ приводится къ рѣшенію въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ уравненія $5x + 2y = 100$.

268. Предварительное замѣчаніе. Какъ было прежде разъяснено (§ 121), одно уравненіе съ двумя неизвѣстными имѣетъ безчисленное множество рѣшеній и потому называется неопредѣленнымъ. Но бываютъ вопросы, когда требуется найти не какія бы то ни было рѣшенія неопредѣленнаго уравненія, а только цѣлыя, и притомъ положительныя; при этомъ условіи можетъ случиться, что одно уравненіе съ двумя неизвѣстными окажется опредѣленнымъ (а иногда и невозможнымъ). Разсмотримъ сначала, какъ можно находить цѣлыя рѣшенія, все равно, будутъ ли они положительныя или отрицательныя, а потомъ укажемъ способъ отдѣлять изъ этихъ цѣлыхъ рѣшеній только положительныя и нулевыя.

269. Когда неопредѣленное уравненіе не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній. Всякое уравненіе первой степени съ двумя неизвѣстными, послѣ надлежащихъ преобразованій, можетъ быть приведено къ виду $ax + by = c$, гдѣ a, b и c суть данныя цѣлыя числа, положительныя или отрицательныя. Мы предположимъ, что эти числа не имѣютъ никакого

общаго дѣлителя, кромѣ 1, потому что въ противномъ случа мы могли бы сократить на него уравненіе. При этомъ услові легко показать, что

если коэффиціенты a и b имѣютъ общаго дѣлителя, отличнаг отъ 1, то уравненіе не можетъ имѣть цѣлыхъ рѣшеній.

Въ самомъ дѣлѣ, если допустимъ, что a и b имѣютъ общаг дѣлителя $m > 1$, а c на него не дѣлится, то, при цѣлыхъ зна ченіяхъ x и y, лѣвая часть уравненія представляетъ цѣло число, дѣлящееся на m, а правая часть есть цѣлое число, н дѣлящееся на m; значитъ, уравненіе невозможно при цѣлых значеніяхъ x и y. Напр., уравненіе $6x - 21y = 19$ не удовле творяется никакими цѣлыми числами, такъ какъ, при цѣлых значеніяхъ x и y, разность $6x - 21y$ дѣлится на 3, тогда как 19 не дѣлится на 3.

Итакъ, разсмотримъ рѣшеніе уравненія $ax + by = c$ въ пред положеніи, что числа a и b взаимно простыя.

270. Частный случай, когда какой-нибуд изъ коэффиціентовъ a и b равенъ 1. Пусть, напр. $b = 1$, т.-е. уравненіе имѣетъ такой видъ:

$$ax + y = c; \text{ откуда: } y = c - ax.$$

Изъ послѣдняго равенства видимъ, что, подставляя вмѣсто какія угодно цѣлыя числа (положительныя или отрицатель ныя), мы будемъ получать и для y цѣлыя числа. Число этих рѣшеній, очевидно, безконечно; всѣ они заключены въ равен ствѣ: $y = c - ax$, которое поэтому можно разсматривать, как рѣшеніе предложеннаго уравненія.

Примѣръ. Рѣшить уравненіе: $x - 5y = 17$.

Рѣшеніе: $x = 5y + 17$.

Подставляя вмѣсто y произвольныя цѣлыя числа: 0, 1, 2 3,..., —1, —2, —3..., получимъ для x соотвѣтствующія зна ченія, выставленныя въ слѣдующей таблицѣ:

$y =$	0	1	2	3	4	...	...	—1	—2	—3	—4
$x =$	17	22	27	32	37	...	...	12	7	2	—3

271. Частный случай, когда $c = 0$. Чтобы рѣшит уравненіе: $ax + by = 0$, въ которомъ a и b цѣлыя взаимно про стыя числа, опредѣлимъ какое-нибудь одно неизвѣстное въ за висимости отъ другого неизвѣстнаго (для ясности мы берем параллельно буквенный и численный примѣры):

$$ax + by = 0 \qquad \Big\| \qquad 17x + 5y = 0$$

$$x = -\frac{by}{a}. \qquad \Big\| \qquad x = -\frac{5y}{17}.$$

Отсюда видно: чтобы x было цѣлое число, необходимо и до статочно, чтобы произведеніе by дѣлилось на a. Но b и a сут числа взаимно простыя; поэтому для дѣлимости by на a нео ходимо [1]) и достаточно, чтобы y дѣлилось на a, т.-е. чтобь частное y/a было цѣлое число (какое угодно). Приравнявъ эт частное произвольному цѣлому числу t, получимъ:

$$\frac{y}{a} = t; \quad y = at; \quad x = -bt \qquad \Big\| \qquad \frac{y}{17} = t; \quad y = 17t; \quad x = -5t.$$

Такъ какъ t означаетъ произвольное цѣлое число, какъ по ложительное, такъ и отрицательное, то мы можемъ замѣнить на $-t$; тогда получимъ для неизвѣстныхъ другія формулы:

$$y = -at; \quad x = bt \qquad \Big\| \qquad y = -17t; \quad x = 5t.$$

Такимъ образомъ, уравненіе имѣетъ рѣшенія, выражаемы формулами:

$$\begin{cases} x = -bt \\ y = at \end{cases} \Big\| \begin{cases} x = -5t \\ y = 17t \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = bt \\ y = -at \end{cases} \Big\| \begin{cases} x = 5t \\ y = -17t. \end{cases}$$

Формулы эти можно высказать такъ: каждое неизвѣстное урав ненія $ax + by = 0$ равно одному и тому же произвольному цѣлом числу, умноженному на коэффиціентъ при другомъ неизвѣстномъ, пр чемъ какой-нибудь одинъ изъ этихъ коэффиціентовъ долженъ быт взятъ съ обратнымъ знакомъ.

---

[1]) Эта необходимость доказывается въ ариѳметикѣ; см., напр., **А. Киселов „Систематическій курсъ ариѳметики"** (§ 120).

Примѣръ. $9x - 13y = 0$: $x = 13t$, $y = 9t$; или $x = -13t$; $y = -9t$.

272. Общій случай. Когда ни одинъ изъ коэффиціентовъ a и b не равенъ 1, и свободный членъ c не равенъ 0, данное уравненіе, посредствомъ нѣкоторыхъ преобразованій, приводятъ къ другому уравненію, у котораго коэффиціенты меньше сравнительно съ первымъ; это уравненіе, въ свою очередь, приводятъ къ третьему, у котораго коэффиціенты еще меньше, и т. д., пока не получатъ уравненія, у котораго коэффиціентъ при какомъ-нибудь неизвѣстномъ равенъ 1. Такое уравненіе, какъ мы видѣли, рѣшается непосредственно.

Чтобы свести уравненіе $ax + by = c$ [1] къ другому, у котораго коэффиціенты меньше, употребимъ послѣдовательно такіе три пріема (для ясности мы параллельно беремъ буквенный и численный примѣры):

1°. Опредѣлимъ изъ уравненія то неизвѣстное, у котораго коэффиціентъ меньше; пусть, напр., $b < a$; тогда опредѣлимъ y:

$$ax + by = c \qquad \Big\| \qquad 26x - 7y = 43$$

$$y = \frac{c - ax}{b} \qquad \Big\| \qquad y = \frac{-43 + 26x}{7}.$$

2°. Исключимъ изъ полученной дроби цѣлое число. Пусть отъ дѣленія c на b частное и остатокъ соотвѣтственно будутъ c_1 и q (если $c < b$, то $c_1 = 0$ и $q = c$), а отъ дѣленія a на b частное и остатокъ пусть будетъ a_1 и r; тогда

$$y = c_1 - a_1x + \frac{q - rx}{b} \qquad \Big\| \qquad y = -6 + 3x + \frac{-1 + 5x}{7}.$$

Изъ этого уравненія заключаемъ: если x и y—числа цѣлыя, то и частное $\frac{q - rx}{b}$ также—число цѣлое; обратно, если частное $\frac{q - rx}{b}$—число цѣлое при цѣломъ значеніи x, то y—число цѣлое; значитъ, для того, чтобы x и y были числа цѣлыя, необходимо и достаточно, чтобы выраженіе $\frac{q - rx}{b}$ было числомъ цѣлымъ при цѣломъ значеніи x. Поэтому:

3°, приравняемъ произвольному цѣлому числу t дробь, получившуюся послѣ исключенія цѣлаго числа:

$$\frac{q - rx}{b} = t \quad \Big\| \quad \frac{-1 + 5x}{7} = t \qquad [t$$

тогда $$y = -c_1 - a_1 x + t \quad \| \quad y = -6 + 3x + t. \qquad [A$$

Если мы найдемъ цѣлыя значенія для x и t, удовлетворяющія ур. [2], то, подставивъ ихъ въ ур. [A], найдемъ и для y соотвѣтствующее цѣлое число. Такимъ образомъ, рѣшеніе ур. [1 сводится къ рѣшенію ур. [2], которое можно писать такъ:

$$bt + rx = q \quad \| \quad 7t - 5x = -1.$$

Коэффиціенты этого новаго уравненія меньше коэффиціентовъ даннаго уравненія, потому что одинъ изъ нихъ равенъ меньшему коэффиціенту даннаго уравненія (именно b), а другой (r) равенъ остатку отъ дѣленія большаго коэффиціента даннаго уравненія на его меньшій коэффиціентъ (отъ дѣленія a на b).

Тѣмъ же способомъ мы приведемъ уравненіе [2] къ третьему, у котораго коэффиціенты еще меньше; это—къ четвертому, у котораго коэффиціенты еще меньше, и т. д., пока, наконецъ, не получимъ уравненія, у котораго одинъ изъ коэффиціентовъ будетъ 1 и которое, слѣд., рѣшается непосредственно. Такъ для взятаго нами численнаго примѣра получимъ:

$$x = \frac{7t + 1}{5} = t + \frac{2t + 1}{5}.$$

Приравниваемъ $\frac{2t+1}{5}$ произвольному цѣлому числу t_1:

$$\frac{2t + 1}{5} = t_1 \quad [3] \qquad\qquad x = t + t_1 \qquad [B$$

Изъ уравненія [3] опредѣляемъ неизвѣстное t, у котораго коэффиціентъ меньше:

$$t = \frac{5t_1 - 1}{2} = 2t_1 + \frac{t_1 - 1}{2}.$$

Приравниваемъ $\frac{t_1 - 1}{2}$ произвольному цѣлому числу t_2:

$$\frac{t_1 - 1}{2} = t_2 \qquad [4] \qquad\qquad t = 2t_1 + t_2$$

Въ уравненіи [4], которое можно написать такъ: $t_1 - 1 = 2t_2$, коэффиціентъ при одномъ неизвѣстномъ равенъ 1, а потому оно рѣшается непосредственно:

$$t_1 = 1 + 2t_2. \qquad [D]$$

Здѣсь t_2 можетъ принимать произвольныя цѣлыя значенія. Положивъ, напр., $t_2 = 0$, найдемъ: $t_1 = 1$; подставивъ эти числа въ ур. (C), получимъ $t = 2$; изъ ур. (B) находимъ: $x = 3$, и, наконецъ, ур. (A) даетъ $y = 5$. Назначивъ для t_2 какое-нибудь другое цѣлое число и переходя послѣдовательно черезъ уравненія (D), (C), (B) и (A), найдемъ соотвѣтствующія значенія x и y.

Впрочемъ, предпочитаютъ составлять формулы, выражающія x и y въ прямой зависимости отъ окончательнаго произвольнаго цѣлаго числа. Переходя послѣдовательно отъ ур. (D) къ (C), отъ (C) къ (B) и отъ (B) къ (A), найдемъ посредствомъ подстановокъ:

$$t_1 = 1 + 2t_2; \quad t = 2(1 + 2t_2) + t_2 = 2 + 5t_2;$$
$$x = (2 + 5t_2) + (1 + 2t_2) = 3 + 7t_2;$$
$$y = -6 + 3(3 + 7t_2) + (2 + 5t_2) = 5 + 26t_2.$$

Равенства $\qquad x = 3 + 7t_2$ и $y = 5 + 26t_2$,

которыя удобнѣе писать безъ знака при буквѣ t, т.-е. такъ:

$$x = 3 + 7t \text{ и } y = 5 + 26t,$$

представляютъ собою общее рѣшеніе даннаго уравненія, такъ какъ, подставляя вмѣсто t произвольныя цѣлыя числа, какъ положительныя, такъ и отрицательныя, мы будемъ получать всевозможныя цѣлыя значенія x и y, удовлетворяющія данному уравненію. Нѣкоторыя изъ этихъ значеній помѣщены въ слѣдующей таблицѣ:

t	0	1	2	. . .	−1	−2	−3
x	3	10	17	. . .	−4	−11	−18
y	5	31	57	. . .	−21	−47	−73

273. Когда неопредѣленное уравненіе имѣетъ цѣлыя рѣшенія. Разсмотрѣвъ описанный способъ рѣшенія, мы замѣчаемъ, что коэффиціенты послѣдовательныхъ уравненій находятся такъ: большій коэффиціентъ даннаго уравненія дѣлится на меньшій, и остатокъ принимается за меньшій коэффиціентъ второго уравненія; затѣмъ меньшій коэффиціентъ даннаго уравненія дѣлится на остатокъ, и остатокъ отъ этого дѣленія принимается за меньшій коэффиціентъ третьяго уравненія; далѣе, первый остатокъ дѣлится на второй, второй на третій и т. д., при чемъ остатокъ отъ каждаго изъ этихъ дѣленій принимается за меньшій коэффиціентъ слѣдующаго уравненія. Изъ ариѳметики извѣстно, что такимъ способомъ послѣдовательнаго дѣленія находится общій наибольшій дѣлитель двухъ чиселъ. Но такъ какъ коэффиціенты даннаго уравненія суть числа взаимно простыя, то ихъ общій наибольшій дѣлитель есть 1; поэтому, дѣля большій коэффиціентъ на меньшій, потомъ меньшій на первый остатокъ, первый остатокъ на второй и т. д., мы непремѣнно дойдемъ до остатка, равнаго 1, т.-е. получимъ уравненіе, у котораго одинъ изъ коэффиціентовъ равенъ 1, а такъ какъ это уравненіе всегда рѣшается въ цѣлыхъ числахъ, то и данное уравненіе въ этомъ случаѣ допускаетъ цѣлыя рѣшенія.

Принявъ во вниманіе сказанное раньше (§ 269), заключаемъ:

Если въ уравненіи $ax+by=c$ коэффиціенты a, b и c суть цѣлыя числа, не имѣющія общаго дѣлителя, отличнаго отъ 1, то для того, чтобы такое уравненіе имѣло цѣлыя рѣшенія, необходимо и достаточно, чтобы коэффиціенты a и b были числа взаимно простыя.

274. Нѣкоторыя упрощенія. **1. Если въ уравненіи $ax+by=c$ числа a и c или b и c имѣютъ общаго дѣлителя, то на него уравненіе можно сократить.**

Пусть, напр., a и c дѣлятся на нѣкоторое число p, такъ что $a=a'p$ и $c=c'p$. Раздѣливъ на p всѣ члены уравненія, получимъ:

$$a'x+\frac{by}{p}=c';$$

откуда видно, что частное $\frac{by}{p}$ должно быть числомъ цѣлымъ; но b и p суть числа взаимно простыя (въ противномъ случаѣ всѣ три числа

a, b и c имѣли бы общаго дѣлителя, большаго 1, и уравненіе могло бы быть сокращено); поэтому by раздѣлится на p только тогда, когда y раздѣлится на p. Положивъ $y=py'$, найдемъ:

$$\frac{by}{p}=by' \text{ и уравненіе будетъ } a'x+by'=c'.$$

Рѣшивъ это уравненіе, найдемъ x и y'; умноживъ на p выраженіе, полученное для y', найдемъ y.

Примѣръ. Рѣшить уравненіе: $8x+21y=28$.

Замѣтимъ, что 8 и 28 дѣлятся на 4, положимъ $y=4y'$ и сократимъ уравненіе на 4:

$$2x+21y'=7.$$

Въ этомъ уравненіи 21 и 7 дѣлятся на 7; поэтому, положивъ $x=7x'$ сократимъ уравненіе на 7:

$$2x'+3y'=1.$$

Рѣшивъ это уравненіе, получимъ:

$$x'=-1+3t, \quad y'=1-2t.$$

Слѣд.,

$$x=-7+21t, \quad y=4-8t.$$

II. При исключеніи цѣлаго числа изъ неправильной дроби, можно пользоваться отрицательными остатками.

Примѣръ.

$$7x-19y=23$$

$$x=\frac{23+19y}{7}=3+2y+\frac{2+5y}{7}.$$

Отъ дѣленія 19 на 7 получается остатокъ 5, большій половины 7-ми но если мы возьмемъ въ частномъ не 2, а 3, то получимъ отрицательный остатокъ —2, абсолютная величина котораго меньше половины 7-и. Очевидно, слѣдующее уравненіе будетъ съ меньшими коэффиціентами, если мы воспользуемся этимъ отрицательнымъ остаткомъ, т.-е. положимъ:

$$x=\frac{23+19y}{7}=3+3y+\frac{2-2y}{7}.$$

III. Если числитель дроби, которую надо приравнять произвольному цѣлому числу, содержитъ нѣкотораго множителя, то полезно его выключить.

Такъ, въ предыдущемъ примѣрѣ числитель дроби $\frac{2-2y}{7}$ содержитъ множителя 2; поэтому можно написать:

$$x=3+3y+\frac{2(1-y)}{7}.$$

Такъ какъ 2 есть число взаимно простое съ 7, то для дѣлимости произведенія $2(1-y)$ на 7, необходимо и достаточно, чтобы $1-y$ дѣлилось на 7. Приравнявъ $\frac{1-y}{7}$ произвольному цѣлому числу t, получимъ:

$$1-y=7t \quad \text{и} \quad x=3+3y+2t.$$

Откуда: $y=1-7t$ и $x=3+3(1-7t)+2t=6-19t$.

275. Зная одну пару цѣлыхъ рѣшеній, можемъ найти остальныя. Пусть какимъ-нибудь способомъ (напримѣръ, просто догадкой) мы нашли, что уравненіе $ax + by = c$ удовлетворяется парою цѣлыхъ рѣшеній: $x = \alpha$ и $y = \beta$; тогда, не рѣшая уравненія, легко составить формулы, включающія въ себѣ всевозможныя цѣлыя рѣшенія. Для этого разсуждаемъ такъ: если α и β есть пара рѣшеній уравненія $ax + by = c$, то мы должны имѣть тождество:

$$a\alpha + b\beta = c.$$

Вычтемъ почленно это тождество изъ даннаго уравненія:

$$a(x - \alpha) + b(y - \beta) = 0.$$

Примемъ въ этомъ уравненіи $x - \alpha$ за одно неизвѣстное, а $y - \beta$ за другое; тогда свободный членъ уравненія будетъ 0, и поэтому мы можемъ воспользоваться формулами, выведенными для этого частнаго случая (§ 271):

$$\begin{cases} x - \alpha = -bt \\ y - \beta = at \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x - \alpha = bt \\ y - \beta = -at \end{cases}$$

Откуда:
$$\begin{cases} x = \alpha - bt \\ y = \beta + at \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \alpha + bt \\ y = \beta - at. \end{cases}$$

Эти общія формулы можно высказать такъ: **каждое неизвѣстное уравненія $ax + by = c$ равно своему частному значенію, сложенному съ произведеніемъ произвольнаго цѣлаго числа на коэффиціентъ при другомъ неизвѣстномъ, при чемъ какой-нибудь одинъ изъ этихъ коэффиціентовъ долженъ быть взятъ съ обратнымъ знакомъ.**

Примѣръ 1. Уравненіе $3x + 4y = 13$ удовлетворяется значеніями $x = 3$, $y = 1$. Поэтому общія формулы будутъ:

$$x = 3 - 4t, \quad y = 1 + 3t$$

или
$$x = 3 + 4t, \quad y = 1 - 3t.$$

Примѣръ 2. Уравненіе $7x - 2y = 11$ имѣетъ пару рѣшеній: $x = y$, $y = -2$; поэтому общія формулы будутъ:

$$x = 1 + 2t, \quad y = -2 + 7t$$

или
$$x = 1 - 2t, \quad y = -2 - 7t.$$

276. Исключеніе отрицательныхъ рѣшеній. Всѣ цѣлыя рѣшенія (положительныя, отрицательныя и нулевыя) уравненія $ax+by=c$ выражаются, какъ мы видѣли, формулами:

$$x=\alpha-bt,\quad y=\beta+at.$$

Отсюда видно, что x и y будутъ отрицательными числами только для такихъ значеній t, при которыхъ двучлены $\alpha-bt$ и $\beta+at$ окажутся меньше 0. Желая исключить всѣ такія рѣшенія и оставить только цѣлыя положительныя или нулевыя рѣшенія, мы должны брать для t цѣлыя значенія, удовлетворяющія слѣдующимъ условіямъ:

$$\alpha-bt\geqslant 0 \text{ и } \beta+at\geqslant 0$$ [1])

Рѣшивъ эти неравенства, соединенныя съ равенствами, найдемъ для t два предѣла, которые ограничатъ произвольность въ выборѣ значеній этого числа. При этомъ могутъ представиться слѣдующіе 2 случая, смотря по тому, будетъ ли число b положительное или отрицательное (число a мы всегда можемъ сдѣлать положительнымъ, умноживъ, въ случаѣ надобности, всѣ члены уравненія на -1):

1. $b>0$. Изъ неравенствъ находимъ:

$$bt\leqslant\alpha \text{ и } at\geqslant-\beta.$$

Откуда:

$$t\leqslant\frac{\alpha}{b} \text{ и } t\geqslant-\frac{\beta}{a}.$$

(Знакъ $=$ имѣетъ мѣсто, конечно, въ томъ только случаѣ, когда $\frac{\alpha}{b}$ и $\frac{\beta}{a}$ суть числа цѣлыя.)

Въ этомъ случаѣ уравненіе имѣетъ столько рѣшеній, сколько есть цѣлыхъ чиселъ между $\frac{\alpha}{b}$ и $-\frac{\beta}{a}$ (считая въ томъ числѣ и самые эти предѣлы, если они—числа цѣлыя). Можетъ случиться, что между этими предѣлами нѣтъ ни одного цѣлаго числа; тогда уравненіе не имѣетъ ни одного цѣлаго положительнаго рѣшенія.

---

[1]) Если бы мы хотѣли исключить еще и нулевыя рѣшенія, то должны были бы въ этихъ формулахъ оставить только знакъ $>$, а знакъ $=$ отбросить.

II. $b < 0$. Въ этомъ случаѣ неравенства даютъ:

$$t \geqslant \frac{a}{b} \text{ и } t \geqslant -\frac{\beta}{a}$$

(при дѣленіи на отрицательное число знакъ неравенства измѣняется). Такъ какъ эти предѣлы—одинаковаго смысла, то достаточно взять изъ нихъ только одинъ, бо́льшій. Значитъ, въ этомъ случаѣ уравненіе имѣетъ безчисленное множество цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

Примѣръ 1. Найти цѣлыя положительныя (или нулевыя) рѣшенія ур. $7x + 9y = 5$.

Такъ какъ коэффиціентъ при y—положительное число, то утверждаемъ *a priori*, что данное уравненіе или имѣетъ конечное число цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній, или не имѣетъ ихъ вовсе. Дѣйствительно, рѣшивъ уравненіе, найдемъ:

$$x = 2 - 9t, \quad y = -1 + 7t.$$

Неравенства $2 - 9t \geqslant 0$ и $-1 + 7t \geqslant 0$

даютъ: $t < 2/9$ и $t > 1/7$.

(Знакъ = опущенъ, такъ какъ оба предѣла дробные.)

Уравненіе не имѣетъ ни одного положительнаго цѣлаго рѣшенія.

Примѣръ 2. Найти цѣлыя положительныя (или нулевыя) рѣшенія ур. $33 - 5x = 3y$.

Сдѣлавъ коэффиціентъ при x положительнымъ, получимъ:

$$5x + 3y = 33.$$

Рѣшивъ уравненіе, найдемъ: $x = 3t$, $y = 11 - 5t$.

Неравенства $3t \geqslant 0$ и $11 - 5t \geqslant 0$

даютъ: $t \geqslant 0$ и $t \leqslant 2\frac{1}{5}$.

Между этими предѣлами заключаются слѣдующія три значенія: $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, соотвѣтственно которымъ получимъ

1) $x = 0$, $y = 11$; 2) $x = 3$, $y = 6$; 3) $x = 6$, $y = 1$.

Примѣръ 3. Найти цѣлыя положительныя (или нулевыя) рѣшенія ур. $29x - 30y = 5$.

Утверждаемъ *a priori*, что это уравненіе имѣетъ безчисленное множество цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній. Дѣйствительно, рѣшивъ уравненіе, находимъ:

$$x = -5 + 30t \geqslant 0, \quad y = -5 + 29t \geqslant 0,$$
$$t > 1/6, \quad t > 5/29.$$

Такъ какъ $5/29 > 1/6$, то достаточно положить, что $t > 5/29$. Слѣдовательно, $t = 1, 2, 3, 4\ldots$

277. Два уравненія первой степени съ тремя неизвѣстными. Пусть требуется рѣшить въ цѣлыхъ числахъ систему:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 7z = 21 \\ 5x - 4y + 6z = 48. \end{cases}$$

Исключивъ одно неизвѣстное, напр. z, получимъ одно уравненіе съ 2 неизвѣстными:

$$47x - 10y = 462.$$

Рѣшивъ это уравненіе, найдемъ:

$$x = 6 + 10t, \quad y = -18 + 47t,$$

гдѣ t есть произвольное цѣлое число, пока рѣчь идетъ только о томъ, чтобы x и y были цѣлыя. Чтобы опредѣлить, какія значенія можно давать для t, чтобы и z было также цѣлымъ числомъ, вставимъ полученныя выраженія вмѣсто x и y въ одно изъ данныхъ уравненій, напр., въ 1-е; отъ этого получимъ одно уравненіе съ неизвѣстными t и z:

$$161t - 7z = 63 \quad \text{или} \quad 23t - z = 9.$$

Рѣшивъ это уравненіе, найдемъ:

$$z = 23t - 9.$$

Для полученія положительныхъ (и нулевыхъ) рѣшеній надо рѣшить слѣдующія неравенства:

$$6 + 10t \geqslant 0, \quad -18 + 47t \geqslant 0, \quad 23t - 9 \geqslant 0,$$

Отсюда находимъ: $t \geqslant -3/5$, $t \geqslant 18/47$ и $t \geqslant 9/23$.

Слѣдов., для t можно брать числа: 1, 2, 3, 4...

Такимъ образомъ, рѣшеніе системы двухъ уравненій первой степени съ 3 неизвѣстными сводится къ двукратному рѣшенію одного уравненія съ 2 неизвѣстными.

ОТДѢЛЪ VII.

Прогрессіи.

ГЛАВА I.

Ариѳметическая прогрессія.

273. Опредѣленіе. Ариѳметической прогрессіей называется такой рядъ чиселъ, въ которомъ каждое число, начиная со второго, равняется предшествующему, сложенному съ однимъ и тѣмъ же постояннымъ для этого ряда числомъ (положительнымъ или отрицательнымъ). Такъ, два ряда:

$$\div\ 2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20.$$

$$\div\!:\ 12,\ 10,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2,\ 0,\ -2,\ -4$$

представляютъ собою ариѳметическія прогрессіи, потому что каждое число въ нихъ, начиная со второго, равно предшествующему, сложенному въ первомъ ряду съ числомъ 3, а во второмъ—съ числомъ —2.

Числа, составляющія прогрессію, наз. ея **членами**. Положительное или отрицательное число, которое надо прибавить къ предшествующему члену, чтобы получить послѣдующій, наз. **разностью прогрессіи**.

Прогрессія [1]) наз. **возрастающею**, когда члены ея увеличиваются по мѣрѣ удаленія отъ начала ряда; она наз. **убывающею**, когда члены ея уменьшаются по мѣрѣ удаленія отъ начала ряда; значитъ, разность первой прогрессіи—положительное число, второй—отрицательное.

[1]) Предполагается прогрессія съ вещественными членами.

Для обозначенія того, что данный рядъ представляетъ собою ариөметическую прогрессію, ставятъ иногда въ началѣ ряда знакъ ÷.

Обыкновенно принято обозначать: первый членъ a, послѣдній l, разность d, число всѣхъ членовъ n и сумму ихъ s.

279. Теорема. **Всякій членъ ариөметической прогрессіи, начиная со второго, равенъ первому ея члену, сложенному съ произведеніемъ разности прогрессіи, на число членовъ, предшествующихъ опредѣляемому.**

Док. Пусть имѣемъ прогрессію: ÷ $a, b, c, \partial \ldots k, l$, у которой разность d. Изъ опредѣленія прогрессіи слѣдуетъ:

2-й членъ b, имѣющій передъ собою 1 чл. $= a + d$
3-й » c, » » » 2 » $= b + d = a + 2d$
4-й » ∂, » » » 3 » $= c + d = a + 3d$

. . . .

Этотъ законъ обладаетъ общностью, потому что, переходя отъ какого-нибудь члена къ слѣдующему, мы должны увеличить на 1 число предшествующихъ членовъ и вмѣстѣ съ тѣмъ прибавить 1 разъ разность.

Такимъ образомъ, 10-й членъ прогрессіи равенъ $a + 9d$; вообще, m-й членъ равенъ $a + d(m - 1)$.

Примѣръ 1. Опредѣлить 12-й членъ прогрессіи, 3, 7, 11...

Такъ какъ разность прогрессіи равна 4, то 12-й членъ будетъ:

$$3 + 4.11 = 47.$$

Примѣръ 2. Найти 10-й членъ прогрессіи: 40, 37, 34...

Такъ какъ разность прогрессіи равна —3, то 10-й членъ будетъ:

$$40 + (-3).9 = 40 - 27 = 13.$$

280. Слѣдствія. 1) Примѣняя доказанную теорему къ послѣднему члену прогрессіи, т.-е. къ n-му, получимъ:

$$l = a + d(n - 1)$$

т.-е. послѣдній членъ ариөметической прогрессіи равенъ первому ея члену, сложенному съ произведеніемъ разности прогрессіи на число всѣхъ членовъ, уменьшенное на единицу.

2) Ариѳметическую прогрессію, у которой первый членъ есть a, разность d и число членовъ n, можно изобразить такъ

$$\div a,\quad a+d,\quad a+2d,\quad a+3d,\ldots a+d(n-1).$$

231. Лемма. Сумма двухъ членовъ ариѳметической прогрессіи равноотстоящихъ отъ концовъ ея, равна суммѣ крайнихъ членовъ.

Док. Пусть имѣемъ прогрессію:

$$\overbrace{a,\ b\ldots\ldots e}^{m}\ldots\ldots\overbrace{h\ldots\ldots k,\ l}^{m},$$

въ которой e есть m-й членъ отъ начала, а h есть m-й членъ отъ конца. Тогда по доказанному (если черезъ d обозначимъ разность прогрессіи):

$$e=a+d(m-1). \qquad (1)$$

Для опредѣленія члена h замѣтимъ, что если данную прогрессію напишемъ съ конца:

$$\overbrace{l,\ k\ldots\ldots h}^{m}\ldots\ldots\overbrace{e\ldots\ldots b,\ a}^{m},$$

то получимъ тоже прогрессію, у которой первый членъ есть l, а разность равна $-d$. Въ этой прогрессіи членъ h есть m-й отъ начала, а потому:

$$h=l+(-d)(m-1)=l-d(m-1). \qquad (2)$$

Сложивъ равенства [1] и [2], получимъ:

$$e+h=a+l.$$

Напр., въ прогрессіи 12, 7, 2, —3, —8, —13, —18 находимъ $12+(-18)=-6$; $7+(-13)=-6$; $2+(-8)=-6$; $-3+$ $+(-3)=-6$.

232. Теорема. Сумма всѣхъ членовъ ариѳметической прогрессіи равна полусуммѣ крайнихъ ея членовъ, умноженной на число всѣхъ членовъ.

Док. Если сложимъ почленно два равенства:

$$\begin{cases} s=a+b+c+\ldots+i+k+l \\ s=l+k+i+\ldots+c+b+a, \end{cases}$$

то получимъ: $2s=(a+l)+(b+k)+(c+i)+\ldots+(l+a)$.

Двучлены, стоящіе внутри скобокъ, представляютъ собою суммы членовъ, равноотстоящихъ отъ концовъ прогрессіи; по доказанному, каждая изъ этихъ суммъ равна $a+l$; поэтому:

$$2s=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\ldots[n \text{ разъ}],$$

т.-е. $$2s=(a+l)n; \quad \text{откуда } s=\frac{(a+l)n}{2}.$$

Примѣръ 1. Опредѣлить сумму натуральныхъ чиселъ отъ 1 до n включительно.

Рядъ: 1, 2, 3,... $(n-1)$, n представляетъ собою ариѳметическую прогрессію, у которой первый членъ есть 1, разность 1, число членовъ n, послѣдній членъ тоже n; поэтому:

$$s=\frac{(1+n)n}{2}.$$

Такъ: $1+2+3+4+5+6=\frac{(1+6)\,6}{2}=21.$

Примѣръ 2. Найти сумму первыхъ n нечетныхъ чиселъ.
Рядъ: 1, 3, 5, 7,... есть ариѳметическая прогрессія, у которой первый членъ есть 1 и разность 2. Если возьмемъ n членовъ, то послѣдній членъ будетъ $1+2(n-1)=2n-1$. Поэтому:

$$s=\frac{[1+(2n-1)]n}{2}=n^2.$$

Такъ: $1+3=4=2^2$; $1+3+5=9=3^2$; $1+3+5+7==16=4^2$; и т. д.

Примѣръ 3. Найти сумму 10 членовъ прогрессіи: 3, $2\frac{1}{2}$, 2...

Въ этой прогрессіи разность равна $-\frac{1}{2}$; поэтому 10-й членъ будетъ $3-\frac{1}{2}\cdot 9=-1\frac{1}{2}$, и искомая сумма

$$s=\frac{[3+(-\frac{1}{2})]10}{2}=7\frac{1}{2}.$$

Дѣйствительно: $3+2\frac{1}{2}+2+1\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{2}-1-1\frac{1}{2}=7\frac{1}{2}$.

Замѣчаніе. Такъ какъ для 5 чиселъ a, l, d, n и s мы имѣемъ два уравненія:

$$1)\ l=a+d(n-1) \quad \text{и} \quad 2)\ s=\frac{(a+l)n}{2},$$

то по даннымъ значеніямъ трехъ изъ этихъ чиселъ мы можемъ находить значенія остальныхъ двухъ. Рѣшимъ для примѣра слѣдующую задачу.

Опредѣлить число членовъ ариѳметической прогрессіи, у которой сумма равна 12, первый членъ 7, а разность есть —2.

Для этой задачи уравненія даютъ:

$$l = 7 - 2(n-1) = 9 - 2n \quad \text{и} \quad 12 = \frac{(7+l)n}{2}.$$

Откуда: $$12 = \frac{(7+9-2n)n}{2} = (8-n)n$$

или $$n^2 - 8n + 12 = 0,$$

слѣд., $$n = 4 \pm \sqrt{16-12} = 4 \pm 2,$$

значитъ, $$n_1 \doteq 6, \quad n_2 = 2.$$

Такимъ образомъ задача имѣетъ два отвѣта: число членовъ или 6, или 2. И дѣйствительно, двѣ прогрессіи:

$$\div 7,\ 5 \text{ и } \div 7,\ 5,\ 3,\ 1,\ -1,\ -3$$

имѣютъ одну и ту же сумму 12.

ГЛАВА II.

Геометрическая прогрессія.

233. Опредѣленіе. Геометрической прогрессіей называется такой рядъ чиселъ, въ которомъ каждое число, начиная со второго равняется предшествующему, умноженному на одно и то же постоянное для каждаго ряда число (положительное или отрицательное). Такъ три ряда:

$$\div\div\ 2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162,\ 486,\ 1458,$$
$$\div\div\ 8,\ -16,\ 32,\ -64,\ 128,\ -256,\ 512,$$
$$\div\div\ 20,\ 10,\ 5,\ \tfrac{5}{2},\ \tfrac{5}{4},\ \tfrac{5}{8},\ \tfrac{5}{16},\ \tfrac{5}{32},$$

представляютъ собою геометрическія прогрессіи, потому что въ этихъ рядахъ каждое число, начиная со второго, получается изъ предшествующаго умноженіемъ: въ первомъ ряду на 3, во второмъ на — 2, въ третьемъ на $\frac{1}{2}$.

Числа, составляющія прогрессію, наз. **ея членами.** Постоянное для каждой прогрессіи число, на которое надо умножить какой-нибудь членъ прогрессіи, чтобы получить слѣдующій членъ, наз. **знаменателемъ прогрессіи.**

Геометрическая прогрессія[1]) наз. **возрастающею** или **убывающею**, смотря по тому, увеличивается или уменьшается абсолютная величина членовъ прогрессіи по мѣрѣ удаленія отъ начала ряда; такъ, изъ трехъ указанныхъ выше прогрессій первая и вторая—возрастающія, а третья—убывающая. Въ возрастающей прогрессіи абсолютная величина знаменателя больше 1, въ убывающей—меньше 1.

Для обозначенія того, что данный рядъ есть прогрессія геометрическая, иногда ставятъ въ началѣ его знакъ $\div\div$.

Обыкновенно принято обозначать: первый членъ a, послѣдній l, знаменателя q, число всѣхъ членовъ n и сумму ихъ s.

284. Теорема. Всякій членъ геометрической прогрессіи, начиная со второго, равенъ первому ея члену, умноженному на такую степень знаменателя прогрессіи, у которой показатель равенъ числу членовъ, предшествующихъ опредѣляемому.

Док. Пусть имѣемъ прогрессію: $\div\div\, a, b, c, \ldots i, k, l$, у которой знаменатель есть q. По опредѣленію прогрессіи будемъ имѣть:

2-й	членъ b,	имѣющій	передъ	собою	1	чл.	$=aq$
3-й	» c,	»	»	»	2	»	$=bq=aq^2$
4-й	» d,	»	»	»	3	»	$=cq=aq^3$
. . . .							. . . .

Этотъ законъ обладаетъ общностью, такъ какъ, переходя отъ какого-нибудь члена къ слѣдующему, мы должны увеличит на 1 число предшествующихъ членовъ и вмѣстѣ съ тѣмъ умножить еще 1 разъ на знаменателя прогрессіи.

Вообще, если члену h предшествуютъ m членовъ, т.-е. есл h есть $(m+1)$-й членъ геометрической прогрессіи, то $h=aq^m$.

Примѣръ I. Опредѣлить 6-й членъ прогрессіи, у которо первый членъ 3, а знаменатель 4.

$$6\text{-й членъ} = 3 \cdot 4^5 = 3072.$$

[1]) Предполагается прогрессія съ вещественными членами.

Примѣръ 2. Опредѣлить 10-й членъ прогрессіи $\div\div$ 20, 10...

Такъ какъ знаменатель этой прогрессіи есть $\frac{1}{2}$, то 10-й членъ $=20.(\frac{1}{2})^9=20\cdot\frac{1}{2^9}=\frac{5}{2^7}=\frac{5}{128}$.

Примѣръ 3. Опредѣлить 4-й членъ прогрессіи:

$$\div\div \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1},\quad \frac{1}{2-\sqrt{2}}\dots$$

$$\text{Знам.}=\frac{1}{2-\sqrt{2}}:\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}-1}{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{4-й членъ}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)^3=\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2})^3}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Слѣдствія. 1) Примѣняя доказанную теорему къ послѣднему члену прогрессіи, т.-е. къ n-му, получимъ:

$$l=aq^{n-1},$$

т.-е. послѣдній членъ геометрической прогрессіи равенъ первому ея члену, умноженному на степень знаменателя, показатель которой равенъ числу всѣхъ членовъ безъ единицы.

2) Геометрическую прогрессію, у которой первый членъ есть a, число членовъ n и знаменатель q, можно изобразить такъ:

$$\div\div a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3\dots aq^{n-1}.$$

235. Теорема. Сумма всѣхъ членовъ геометрической прогрессіи равна дроби, у которой числитель есть разность между произведеніемъ послѣдняго члена на знаменателя прогрессіи и первымъ членомъ, а знаменатель есть разность между знаменателемъ прогрессіи и единицею, т.-е.

$$s=\frac{lq-a}{q-1}.$$

Док. По опредѣленію геометрической прогрессіи:

$$\begin{cases} b = aq \\ c = bq \\ d = cq \\ \dots \\ \dots \\ k = iq \\ l = kq \end{cases}$$

Сложимъ эти равенства почленно; тогда въ лѣвой части получается сумма всѣхъ членовъ безъ перваго, а въ правой — произведеніе знаменателя q на сумму всѣхъ членовъ безъ послѣдняго.

$$s - a = (s - l)q.$$

Остается рѣшить это уравненіе относительно s:

$$s - a = sq - lq; \quad lq - a = sq - s = s(q - 1),$$

$$s = \frac{lq - a}{q - 1}.$$

Умноживъ числителя и знаменателя этой формулы на -1, мы придадимъ другой видъ выраженію суммы, который тоже полезно запомнить:

$$s = \frac{a - lq}{1 - q}.$$

Послѣдняя формула удобна для прогрессіи убывающей, потому что тогда $a > lq$ и $1 > q$.

Примѣръ 1. Опредѣлить сумму 10 членовъ прогрессіи: 1, 2, 2^2...

Въ этой прогрессіи $a = 1$, $q = 2$, $l = 1 . 2^9 = 2^9$; поэтому:

$$s = \frac{2^9 . 2 - 1}{2 - 1} = 2^{10} - 1 = 1023.$$

Примѣръ 2. Опредѣлить сумму 8 членовъ прогрессіи: $\div\div\, 1 . \frac{1}{3} \dots$

Здѣсь $a = 1$, $q = \frac{1}{3}$, $l = 1 . (\frac{1}{3})^7$, поэтому

$$s = \frac{1 - (\frac{1}{3})^8}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{32\;0}{2187}.$$

Замѣчаніе. Два уравненія: $l = aq^{n-1}$ и $s = \frac{lq - a}{q - 1}$ содер жать 5 чиселъ и потому позволяютъ по даннымъ тремъ найт остальныя два. Рѣшимъ для примѣра слѣдующую задачу.

По даннымъ s, q и n найти a и l.

Изъ уравненія $$s = \frac{aq^n - a}{q - 1}$$

находимъ: $$a = \frac{s(q-1)}{q^n - 1},$$

послѣ чего получимъ: $$l = aq^{n-1} = \frac{s(q-1)}{q^n - 1} q^{n-1}.$$

286. Безконечная геометрическая прогрес сія. Если рядъ чиселъ, составляющихъ прогрессію, предпо лагается продолженнымъ безъ конца, то прогрессія **наз. безко нечной**. Относительно безконечной геометрической прогрессі докажемъ слѣдующія 3 теоремы.

Теорема I. **Абсолютная величина члена безконечной геометри ческой возрастающей прогрессіи, при достаточномъ удаленіи его от начала ряда, дѣлается большей какого угодно даннаго числа (как бы велико оно ни было) и при дальнѣйшемъ удаленіи постоянн остается большей этого числа.**

Пусть q есть абсолютная величина знаменателя геометри ческой прогрессіи и a—абсолютная величина ея перваго члена тогда абс. величина членовъ прогрессіи выразится такъ:

$$\div\div\ a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3, \ldots\ aq^n \ldots$$

Требуется доказать, что если $q > 1$, т.-е. если прогрессія **возрастающая**, то при достаточномъ возрастаніи n-й членъ aq дѣлается (и при дальнѣйшемъ возрастаніи остается) большимъ какого угодно даннаго числа A (какъ бы велико это число н было). Для этого возьмемъ сумму первыхъ n членовъ данно прогрессіи:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{aq^n - a}{q - 1}.$$

Такъ какъ $q > 1$, то каждое слагаемое этой суммы, начиная со второго, больше a, а потому вся сумма больше числа a, повтореннаго n разъ, т.-е. больше an; значитъ:

$$\frac{aq^n - a}{q - 1} > an.$$

Умноживъ обѣ части этого неравенства на положительное число $q - 1$, мы не измѣнимъ знака неравенства; поэтому

$$aq^n - a > an(q - 1); \quad \text{откуда:} \quad aq^n > an(q - 1) + a.$$

Чтобы число aq^n сдѣлалось больше даннаго числа A, достаточно, очевидно, взять n настолько большимъ, чтобы удовлетворялось неравенство:

$$a(q - 1)n + a \geqslant A,$$

т.-е. чтобы

$$n \geqslant \frac{A - a}{a(q - 1)},$$

что вполнѣ возможно (какъ бы велико ни было число A), такъ какъ n мы можемъ сдѣлать сколько угодно большимъ. Если, напр., $a = 1$, $q = 1{,}2$ и $A = 1000$, то послѣднее неравенство даетъ: $n > \frac{1000 - 1}{1(1{,}2 - 1)}$, т.-е. $n \geqslant \frac{999}{0{,}2}$ или $n \geqslant 4995$, значитъ, можемъ ручаться, что всѣ члены, начиная съ 4995-го, окажутся болѣе 1000.

Замѣчаніе. Доказанная теорема примѣнима также и къ безконечной **ариѳметической** прогрессіи. Такъ, если возьмемъ прогрессію: a, $a + d$, $a + 2d$,... $a + nd$,..., то, какъ бы мала разность d ни была, членъ $a + nd$, при достаточномъ возрастаніи n, превзойдетъ любое данное число A, какъ бы оно велико ни было; для этого достаточно взять n настолько большимъ, чтобы удовлетворялось неравенство: $a + dn > A$, которое для n даетъ: $n > (A - a) : d$.

Теорема 2. **Абсолютная величина члена безконечной геометрической убывающей прогрессіи, при достаточномъ удаленіи его отъ начала ряда, дѣлается меньшей какого угодно даннаго положительнаго числа (какъ бы мало оно ни было) и при дальнѣйшемъ удаленіи постоянно остается меньшей этого числа.**

Пусть попрежнему абс. величина членовъ прогрессіи будетъ

$$\div a, aq, aq^2, aq^3 \dots aq^n \dots$$

Требуется доказать, что если $q < 1$, т.-е. если прогрессія—убывающая, то при достаточномъ возрастаніи n-й членъ aq^n дѣлается и при дальнѣйшемъ возрастаніи остается меньшимъ какого угодно даннаго положительнаго числа B (какъ бы мало это число ни было). Для доказательства возьмемъ вспомогательную прогрессію:

$$\div \frac{1}{a}, \frac{1}{aq}, \frac{1}{aq^2}, \frac{1}{aq^3} \dots \frac{1}{aq^n} \dots$$

Эта прогрессія возрастающая, такъ какъ ея знаменатель есть дробь $\frac{1}{q}$, которая, при $q < 1$, больше 1. По доказанному въ теоремѣ 1-й, n-й членъ этой прогрессіи, т.-е. $\frac{1}{aq^n}$, при неограниченномъ возрастаніи n, дѣлается и остается большимъ какого угодно даннаго числа A (какъ бы велико оно ни было). Возьмемъ за A число $\frac{1}{B}$. Тогда при достаточно большемъ n и при дальнѣйшемъ возрастаніи n будетъ имѣть мѣсто неравенство:

$$\frac{1}{aq^n} > \frac{1}{B}; \text{ откуда: } aq^n < B.$$

Теорема, такимъ образомъ, доказана.

Теорема 3. Сумма первыхъ n членовъ безконечной геометрической убывающей прогрессіи:

$$\div a, aq, aq^2, aq^3 \dots aq^{n-1}, aq^n \dots,$$

при неограниченномъ увеличеніи числа ихъ n, приближается къ предѣлу, равному частному:

$$\frac{a}{1-q}$$

отъ дѣленія перваго члена прогрессіи на разность между 1 и знаменателемъ прогрессіи.

Дѣйствительно, сумма первыхъ n членовъ этой прогрессіи равна (§ 285):

$$\frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q},$$

т. е. она равна постоянному числу $\frac{a}{1 - q}$, уменьшенному на дробь $\frac{aq^n}{1 - q}$. Но при неограниченномъ возрастаніи n абсолютная величина числителя этой дроби, по доказанному, дѣлается и остается меньше какого угодно даннаго положительнаго числа (какъ бы мало оно ни было); и такъ какъ знаменатель этой дроби есть число постоянное, то, значитъ, и сама дробь при этомъ дѣлается и остается какъ угодно малой; а это, согласно опредѣленію предѣла [1]), означаетъ, что

$$\text{пред. } (a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n) = \frac{a}{1 - q}.$$

Примѣръ 1. Найти предѣлъ s суммы: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$

Здѣсь $a = 1$, $q = \frac{1}{2}$; поэтому $s = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$.

Примѣръ 2. Найти предѣлъ s суммы: $\frac{3}{2} + (-\frac{2}{3}) + \frac{8}{27} \cdots$

Здѣсь $a = \frac{3}{2}$; $q = -\frac{4}{9}$; поэтому

$$s = \frac{\frac{3}{2}}{1 + \frac{4}{9}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{13}{9}} = \frac{27}{26}.$$

Примѣръ 3. Опредѣлить точную величину чистой періодической дроби: 0,232323...

Точная величина этой дроби есть предѣлъ s суммы:

$$\frac{23}{100} + \frac{23}{10000} + \frac{23}{1000000} + \cdots,$$

[1]) См. § 279 „Элементарной геометріи" А. Киселева.

которая, очевидно, представляетъ собою сумму членовъ геометрической прогрессіи; у нея первый членъ есть $\frac{23}{100}$, а знаменатель $=\frac{1}{100}$; поэтому:

$$s=\frac{\frac{23}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{\frac{23}{100}}{\frac{99}{100}}=\frac{23}{99}.$$

То же число мы получили бы по правилу ариѳметики.

Примѣръ 4. Опредѣлить точную величину смѣшанной періодической дроби 0,3545454...

Точная величина этой дроби есть предѣлъ s суммы:

$$\frac{3}{10}+\frac{54}{1000}+\frac{54}{100000}+\frac{54}{10000000}+\ldots$$

Слагаемыя этой суммы, начиная со второго, суть членъ безконечной геометрической убывающей прогрессіи, у которой первый членъ есть $\frac{54}{1000}$ и знаменатель$=\frac{1}{100}$. Поэтому:

$$s=\frac{3}{10}+\frac{\frac{54}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{3}{10}+\frac{54}{990}=\frac{3.99+54}{990}=\frac{3.100-3+54}{990}=\frac{354-3}{990}$$

То же число мы получили бы по правилу ариѳметики.

ОТДѢЛЪ VIII.

Обобщеніе понятія о показателѣ.

ГЛАВА I.

Отрицательные показатели.

237. Опредѣленіе. Условимся при дѣленіи степеней одного и того же числа производить вычитаніе показателей и въ томъ случаѣ, когда показатель дѣлителя больше показателя дѣлимаго; тогда мы получимъ въ частномъ букву съ отрицательнымъ показателемъ; напр.: $a^2 : a^5 = a^{-3}$. Конечно, отрицательный показатель не имѣетъ того значенія, который придается положительнымъ показателямъ, такъ какъ нельзя повторить число сомножителемъ -2 раза, -3 раза и т. д. **Число съ отрицательнымъ показателемъ мы будемъ употреблять для обозначенія частнаго отъ дѣленія степеней этого числа въ томъ случаѣ, когда показатель дѣлителя превосходитъ показателя дѣлимаго на столько единицъ, сколько ихъ находится въ абсолютной величинѣ отрицательнаго показателя.** Такъ, a^{-2} означаетъ частное $a^m : a^{m+2}$, вообще a^{-n} означаетъ частное $a^m : a^{m+n}$.

Понимаемое въ этомъ смыслѣ **число съ отрицательнымъ показателемъ равно дроби, у которой числитель есть 1, а знаменатель — то же число съ положительнымъ показателемъ.**

Дѣйствительно, согласно нашему условію: $a^{-n} = a^m : a^{m+n} = \frac{a^m}{a^{m+n}}$. Сокративъ полученную дробь на a^m, получимъ:

$$a^{-n} = \frac{a^m}{a^{m+n}} = \frac{1}{a^n}.$$

Напр.: $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$, $(a+x)^{-3} = \frac{1}{(a+x)^3}$ и т. п.

238. Отрицательные показатели даютъ возможность представить дробное алгебраическое выраженіе подъ видомъ цѣлаго; для этого стоитъ только всѣхъ множителей знаменателя перенести множителями въ числителя, взявъ ихъ съ отрицательными показателями. Напр.:

$$\frac{3a}{b^2c^3}=3a\cdot\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{c^3}=3ab^{-2}c^{-3}.$$

Само собою разумѣется, что такое преобразованіе дробнаго выраженія въ цѣлое есть только измѣненіе одного вида выраженія, а не содержанія его.

239. Дѣйствія надъ степенями съ отрицательными показателями. Такое измѣненіе внѣшняго вида имѣетъ, однако, важное значеніе, такъ какъ всѣ дѣйствія надъ степенями съ отрицательными показателями можно выполнять по тѣмъ же правиламъ, какія были выведены для показателей положительныхъ. Докажемъ это.

Умноженіе. Разсмотримъ отдѣльно три случая: 1) когда одно множимое имѣетъ отрицательнаго показателя, 2) когда одинъ множитель имѣетъ отрицательнаго показателя и 3) когда оба сомножителя—съ отрицательными показателями. Предстоитъ доказать, что во всѣхъ этихъ случаяхъ показатели одинаковыхъ буквъ складываются. Для этого какъ въ случаѣ умноженія, такъ и при доказательствѣ правилъ другихъ дѣйствій поступимъ такъ: вмѣсто степени съ отрицательнымъ показателемъ подставимъ дробь, у которой числитель есть 1, а знаменатель—возвышаемое число съ положительнымъ показателемъ, затѣмъ произведемъ дѣйствіе по правилу, относящемуся до дробей, и полученный результатъ сравнимъ съ тѣмъ, который предстоитъ доказать:

1) Требуется доказать, что: $a^{-m}.a^n=a^{-m+n}$.

Док.: $a^{-m}.a^n=\frac{1}{a^m}.a^n=\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}=a^{-m+n}$.

2) Требуется доказать, что $a^m.a^{-n}=a^{m+(-n)}$.

Доказательство то же самое.

3) Требуется доказать, что: $a^{-m}.a^{-n}=a^{-m+(-n)}$.

Док.: $a^{-m}.a^{-n}=\frac{1}{a^m}\cdot\frac{1}{a^n}=\frac{1}{a^m a^n}=\frac{1}{a^{m+n}}=a^{-(m+n)}=a^{-m+(-n)}$.

Дѣленіе. Разсмотримъ также три случая:

1) Требуется доказать, что: $a^{-m}:a^n=a^{-m-n}$.

Док.: $a^{-m}:a^n=\frac{1}{a^m}:a^n=\frac{1}{a^m.a^n}=\frac{1}{a^{m+n}}=a^{-(m+n)}=a^{-m-n}$.

2) Требуется доказать, что: $a^m:a^{-n}=a^{m-(-n)}$.

Док.: $a^m:a^{-n}=a^m:\frac{1}{a^n}=a^m.a^n=a^{m+n}=a^{m-(-n)}$.

3) Требуется доказать, что: $a^{-m}:a^{-n}=a^{-m-(-n)}$.

Док.: $a^{-m}:a^{-n}=\frac{1}{a^m}:\frac{1}{a^n}=\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}=a^{-m-(-n)}$.

Возвышеніе въ степень. Разсмотримъ также три случая:

1) Требуется доказать, что: $(a^{-m})^n=a^{(-m)n}$.

Док.: $(a^{-m})^n=\left(\frac{1}{a^m}\right)^n=\frac{1}{(a^m)^n}=\frac{1}{a^{mn}}=a^{-mn}=a^{(-m)n}$.

2) Требуется доказать, что: $(a^m)^{-n}=a^{m(-n)}$.

Док.: $(a^m)^{-n}=\frac{1}{(a^m)^n}=\frac{1}{a^{mn}}=a^{-mn}=a^{m(-n)}$.

3) Требуется доказать, что: $(a^{-m})^{-n}=a^{(-m)(-n)}$.

Док.: $(a^{-m})^{-n}=\left(\frac{1}{a^m}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^n}=\frac{1}{\frac{1}{a^{mn}}}=a^{mn}=a^{(-m)(-n)}$.

Извлеченіе корня. Требуется доказать, что:

$\sqrt[n]{a^{-m}}=a^{\frac{-m}{n}}$, если m дѣлится на n нацѣло, напр., $\sqrt[4]{a^{-12}}=a^{-3}$.

Док.: $\sqrt[n]{a^{-m}}=\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}=\frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a^m}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=a^{-\frac{m}{n}}$.

Въ нашемъ курсѣ не встрѣтится надобности разсматривать радикалы съ отрицательными показателями, а потому мы ограничимся только доказаннымъ выше случаемъ.

Докажемъ еще, что теоремы о возвышеніи въ степень произведенія и дроби (§ 155) остаются вѣрными и для отрицательныхъ показателей. Дѣйствительно:

$$1)\ (abc)^{-n} = \frac{1}{(abc)^n} = \frac{1}{a^nb^nc^n} = \frac{1}{a^n}\cdot\frac{1}{b^n}\cdot\frac{1}{c^n} = a^{-n}b^{-n}c^{-n}.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = 1 : \frac{a^n}{b^n} = \frac{b^n}{a^n} = \frac{1}{a^n} : \frac{1}{b^n} = a^{-n} : b^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}}.$$

Примѣры. 1) $(3a^{-2n}b^2c^{1-r})(0{,}8a^{n+1}b^{-3}c^{r+2}) = 2{,}4a^{1-n}b^{-1}c^3$

2) $(x^{2n-r}y^{-m}z^2) : (5x^{-r}y^3z^{-n}) = \frac{1}{5}x^{2n}y^{-m-3}z^{n+2}$.

3) $(a^{-2}+b^{-3})(a^{-2}-b^{-3}) = a^{-4}-b^{-6}$.

4) $\sqrt[3]{27p^{-9}q^{-3x+6}r^2} = 3p^{-3}q^{-x+2}\sqrt[3]{r^2}$.

ГЛАВА II.

Дробные показатели.

290. Опредѣленіе. Мы видѣли (§ 166, теор. 2-я), что при извлеченіи корня изъ степени дѣлятъ показателя подкоренного числа на показателя корня, если такое дѣленіе выполняется нацѣло. Теперь мы условимся распространить это правило и на тотъ счетъ, когда показатель подкоренного числа не дѣлится нацѣло на показателя корня. Въ такомъ случаѣ въ результатѣ извлеченія мы должны получить степень съ дробнымъ показателемъ; напр.:

$$\sqrt[3]{a^5} \text{ выразится } a^{\frac{5}{3}}, \sqrt[n]{a^m} \text{ выразится } a^{\frac{m}{n}}, \text{ и т. п.}$$

Само собою разумѣется, что дробные показатели не имѣютъ того значенія, какимъ обладаютъ цѣлые положительные показатели; напр., нельзя понимать степень $a^{\frac{2}{3}}$ въ томъ смыслѣ, что a берется сомножителемъ $\frac{2}{3}$ раза, такъ какъ выраженіе «$\frac{2}{3}$ раза» не имѣетъ смысла. Степень $a^{\frac{m}{n}}$ есть только иной видъ радикала

у котораго показатель подкоренного числа есть m, а показатель самого радикала есть n. Такимъ образомъ, $a^{\frac{2}{3}}$ есть не что иное, какъ $\sqrt[3]{a^2}$, $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ есть иной видъ выраженія $\sqrt{1+x}$, и т. п.

Условно допускаются также и отрицательные дробные показатели въ томъ смыслѣ, что число съ такимъ показателемъ равносильно дроби, у которой числитель есть 1, а знаменатель — то же число съ положительнымъ показателемъ, такъ:

$$a^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}.$$

291. Дробные показатели даютъ возможность представить ирраціональное выраженіе подъ видомъ раціональнаго; напр., выраженіе $3\sqrt{a}\sqrt[3]{x^2}$ можно представить такъ: $3a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{2}{3}}$. Конечно, такое преобразованіе измѣняетъ только внѣшній видъ выраженія, а не содержаніе его; однако подобное измѣненіе имѣетъ важное значеніе, такъ какъ оказывается, что всѣ дѣйствія надъ степенями, имѣющими дробныхъ показателей, можно производить по тѣмъ же правиламъ, какія были выведены для цѣлыхъ показателей. Докажемъ это.

292. Основное свойство дробнаго показателя. Если дробнаго показателя $\frac{m}{n}$ замѣнимъ равнымъ ему показателемъ, $\frac{m'}{n'}$, то величина степени не измѣнится.

Пусть $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$; требуется доказать, что $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m'}{n'}}$. Для доказательства замѣнимъ степени съ дробными показателями ихъ настоящими значеніями:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},\quad a^{\frac{m'}{n'}} = \sqrt[n']{a^{m'}}.$$

Приведя эти радикалы къ одинаковому показателю, получимъ:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nn']{a^{mn'}};\quad \sqrt[n']{a^{m'}} = \sqrt[n'n]{a^{m'n}}.$$

Но изъ равенства $\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$ слѣдуетъ, что $mn'=nm'$; значитъ

$$\sqrt[nn']{a^{mn'}}=\sqrt[nn']{a^{m'n}},\text{ т.-е. }\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n']{a^{m'}}\text{ или }a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m'}{n'}}.$$

Основываясь на доказанномъ свойствѣ, мы можемъ преобразовывать дробнаго показателя совершенно такъ же, какъ обыкновенную дробь, лишь бы только преобразованіе не измѣняло величины показателя; напр., мы можемъ числителя и знаменателя дробнаго показателя умножить или раздѣлить на одно и то же число (ср. съ § 205).

293. Дѣйствія надъ степенями съ дробными показателями. Предстоитъ доказать, что къ дробнымъ положительнымъ показателямъ примѣнимы правила, выведенныя раньше для цѣлыхъ показателей. Ходъ доказательства для всѣхъ дѣйствій одинъ и тотъ же: степени съ дробными показателями замѣняемъ радикалами; производимъ дѣйствіе по правилу о радикалахъ; результатъ выражаемъ дробнымъ показателемъ и затѣмъ его сравниваемъ съ тѣмъ, что требовалось доказать.

Умноженіе. Требуется доказать, что $a^{\frac{m}{n}}a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$.

Док. $a^{\frac{m}{n}}a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[n]{a^m}\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{mq}}\sqrt[nq]{a^{pn}}=\sqrt[nq]{a^{mq}a^{pn}}=\sqrt[nq]{a^{mq+pn}}=$

$$=a^{\frac{mq+pn}{nq}}=a^{\frac{mq}{nq}+\frac{pn}{nq}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Полагая $n=1$, или $q=1$, найдемъ, что правило о сложеніи показателей распространяется и на тотъ случай, когда одинъ изъ показателей—дробь, а другой—цѣлое число.

Дѣленіе. Требуется доказать, что $a^{\frac{m}{n}}:a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$.

Док. $a^{\frac{m}{n}}:a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[n]{a^m}:\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{mq}}:\sqrt[nq]{a^{pn}}=\sqrt[nq]{a^{mq}:a^{pn}}=\sqrt[nq]{a^{mq-pn}}=$

$$=a^{\frac{mq-pn}{nq}}=a^{\frac{mq}{nq}-\frac{pn}{nq}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}.$$

Доказательство не теряетъ силы, если положимъ $n=1$ или $q=1$.

Возвышеніе въ степень. Требуется доказать, что

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}.$$

Док. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} =$

$$= a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}.$$

Доказательство не теряетъ силы, если положимъ $n = 1$ или $q = 1$.

Извлеченіе корня. Требуется доказать, что

$$\sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m}{n}:p}.$$

Док. $\sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[np]{a^m} = a^{\frac{m}{np}} = a^{\frac{m}{n}:p}$

Докажемъ еще, что теоремы о возвышеніи въ степень произведенія и дроби (§ 155) остаются вѣрными и для дробныхъ показателей.

I. Требуется доказать, что $(abc)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}} c^{\frac{m}{n}}$.

Док. $(abc)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(abc)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m c^m} = \sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{b^m}\sqrt[n]{c^m} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}} c^{\frac{m}{n}}$.

II. Требуется доказать, что $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$.

Док. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$.

224. Если показатели не только дробные, но и отрицательные, то и въ этомъ случаѣ къ нимъ можно примѣнять правила, относящіяся до положительныхъ показателей. Покажемъ это для какого-нибудь одного дѣйствія, напр., для умноженія.

Пусть требуется доказать, что $a^{-\frac{m}{n}} . a^{-\frac{p}{q}} = a^{-\frac{m}{n}+\left(-\frac{p}{q}\right)}$.

Док. $a^{-\frac{m}{n}} . a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \cdot \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}} = a^{-\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)} = a^{-\frac{m}{n}+\left(-\frac{p}{q}\right)}$.

Подобнымъ же образомъ убѣдимся, что и другія дѣйствія можно совершать по правиламъ, относящимся до положительныхъ показателей.

ГЛАВА III.

Понятіе объ ирраціональномъ показателѣ.

295. Относительно ирраціональныхъ показателей мы ограничимся сообщеніемъ только самыхъ элементарныхъ свѣдѣній. Прежде всего замѣтимъ, что выраженію a^α, въ которомъ α— ирраціональное число, придаютъ смыслъ только тогда, когда основаніе a положительное. При этомъ могутъ представиться слѣдующіе 3 случая.

1) Показатель α есть положительное ирраціональное число, при чемъ основаніе a больше 1.

Обозначимъ черезъ α_1 любое приближенное раціональное значеніе числа α, взятое съ недостаткомъ, и черезъ α_2 любое приближенное раціональное значеніе числа α, взятое съ избыткомъ. Тогда **выраженіе a^α означаетъ число, которое больше всякой степени a^{α_1} и меньше всякой степени a^{α_2}.** Если, напр., $\alpha=\sqrt{2}$, то a^α означаетъ число, большее каждаго изъ чиселъ ряда:

$$a^{1,4},\ a^{1,41},\ a^{1,414},\ a^{1,4142},\ldots \tag{1}$$

въ которомъ показатели при a суть десятичныя приближенныя значенія $\sqrt{2}$, взятыя всѣ съ недостаткомъ, и меньше каждаго изъ чиселъ ряда:

$$a^{1,5},\ a^{1,42},\ a^{1,415},\ a^{1,4143},\ldots \tag{2}$$

въ которомъ показатели суть десятичныя приближенныя значенія $\sqrt{2}$, взятыя всѣ съ избыткомъ.

2) Показатель α есть положительное ирраціональное число, но $a<1$.

Тогда **выраженіе a^α означаетъ число, которое меньше всякой степени a^{α_1} и больше всякой степени a^{α_2}.** Такъ, если $\alpha=\sqrt{2}$ то a^α при $a<1$ представляетъ собою число, меньшее каждаго изъ чиселъ ряда (1) и большее каждаго изъ чиселъ ряда (2).

3) Показатель α есть отрицательное ирраціональное число и $a \gtrless 1$.

Тогда выраженію a^α придаютъ тотъ же смыслъ, какой имѣютъ степени съ отрицательными раціональными показателями; такъ $a^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{a^{\sqrt{2}}}$.

При подробномъ изложеніи теоріи ирраціональныхъ показателей доказывается, что, во-1-хъ, число, бо́льшее (меньшее) всякой степени a^{α_1} и меньшее (бо́льшее) всякой степени a^{α_2}, существуетъ и притомъ только одно при всякомъ данномъ положительномъ a, и во-2-хъ, что съ ирраціональными показателями можно поступать по тѣмъ же правиламъ, какія были выведены для показателей раціональныхъ; такъ:

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}; \quad a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha-\beta}; \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}.$$

296. Примѣры на дѣйствія съ дробными и отрицательными показателями.

$$1) \frac{2a^2b^{-3}}{3a^{-\frac{3}{4}}b^{1,5}} \cdot \frac{5a^{\frac{7}{12}}b^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[12]{a^3b^5}} = \frac{2a^2b^{-3}}{3a^{-\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{5a^{\frac{7}{12}}b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{5}{12}}} = \frac{10a^{\frac{31}{12}}b^{-\frac{17}{6}}}{3a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{23}{12}}} = \frac{10}{3}a^{\frac{37}{12}}b^{-\frac{57}{12}} =$$

$$= \frac{10}{3}\sqrt[12]{\frac{a^{37}}{b^{57}}} = \frac{10a^3}{3b^4}\sqrt[12]{\frac{a}{b^9}};$$

$$\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}}\right) = \left[a^{\frac{1}{2}} + \left(b^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}\right)\right]\left[a^{\frac{1}{2}} - \left(b^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}\right)\right] =$$

$$= a - \left(b^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a - b - c + 2b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}} = a - b - c + 2\sqrt{bc};$$

$$\sqrt{12a^{-4}b^3} : \left[\left(\frac{a^5}{3b^{-4}}\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{4}} = \left(2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}a^{-2}b^{\frac{3}{2}}\right) : \frac{a^{-\frac{5}{2}}}{3^{-\frac{1}{2}}b^2} =$$

$$= 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{7}{2}} = 2b^3\sqrt{ab}.$$

ОТДѢЛЪ IX.

Логариѳмы.

ГЛАВА I.

Общія свойства логариѳмовъ.

297. Предварительное замѣчаніе. Если въ равенствѣ: $a^b = N$ числа a и b даны, а число N требуется найти, то дѣйствіе, потребное для этого, называется, какъ мы знаемъ, возвышеніемъ въ степень: N есть степень, a—основаніе степени, b—ея показатель. Этому дѣйствію соотвѣтствуютъ два обратныя: одно—нахожденіе основанія a по даннымъ степени: N и показателю b (называется извлеченіемъ корня b—й степени), другое — нахожденіе показателя b по даннымъ: степени N и основанію a (называется нахожденіемъ логариѳма числа N по основанію a). Поставимъ вопросъ, различны ли эти дѣйствія? Вѣдь и для умноженія можно усмотрѣть два обратныя дѣйствія: первое — нахожденіе множимаго по даннымъ: произведенію и множителю, второе нахожденіе—множителя по даннымъ: произведенію и множимому. Однако дѣйствія эти разсматриваются не какъ различныя, а какъ одно и то же дѣйствіе, называемое дѣленіемъ. Причина сліянія этихъ двухъ обратныхъ дѣйствій въ одно заключается въ перемѣстительномъ свойствѣ умноженія, по которому произведеніе не мѣняется отъ перемѣны мѣстъ множимаго и множителя. Въ такомъ же положеніи находится и сложеніе (2-хъ слагаемыхъ); этому дѣйствію также можно указать два обратныя дѣйствія: одно—нахожденіе неизвѣстнаго

числа (1-го слагаемаго), къ которому надо прибавить данное число (2-е слагаемое), чтобы получить данную сумму; другое—нахожденіе неизвѣстнаго числа (2-го слагаемаго), которое надо прибавить къ данному числу (къ 1-му слагаемому), чтобы получить данную сумму. Однако эти два дѣйствія разсматриваются, какъ одно, называемое вычитаніемъ, вслѣдствіе того, что сложеніе обладаетъ перемѣстительнымъ свойствомъ, по которому сумма не зависитъ отъ порядка слагаемыхъ. Если бы это свойство принадлежало также и возвышенію въ степень, то тогда и два указанныя выше обратныя дѣйствія составляли бы въ сущности одно. Но возвышеніе въ степень не обладаетъ свойствомъ перемѣстительности; напр. 2^3 не равно 3^2, 4^1 не равно 1^4, 10^2 не равно 2^{10}, и т. д. Вслѣдствіе этого нахожденіе основанія по даннымъ—показателю и степени (извлеченіе корня) существенно отличается отъ нахожденія показателя по даннымъ—основанію и степени (нахожденіе логариѳма).

Замѣтимъ, что послѣднее дѣйствіе въ элементарной алгебрѣ подробно не разсматривается; указываются главнымъ образомъ его практическія примѣненія.

298. Опредѣленіе. **Логариѳмомъ числа N по основанію a называется показатель степени, въ которую надо возвысить основаніе a, чтобы получить число N**; при чемъ этотъ показатель степени можетъ быть числомъ цѣлымъ и дробнымъ, положительнымъ и отрицательнымъ, раціональнымъ и ирраціональнымъ.

Согласно этому опредѣленію, если имѣемъ равенство $a^x = N$, то можемъ сказать, что x есть логариѳмъ числа N по основанію a; это можно выразить также такимъ обозначеніемъ:

$$x = \mathrm{Log}\, N, \text{ или } x = \log N, \text{ или } x = \lg N,$$

гдѣ знаки Log, log и lg сокращенно обозначаютъ слово «логариѳмъ». Иногда для обозначенія того, по какому основанію берется логариѳмъ, внизу этихъ знаковъ ставятъ букву и число, означающее основаніе; напр., равенство $\mathrm{Log}_a N = x$ означаетъ, что логариѳмъ числа N по основанію a есть x.

Примѣры.

1°. Возьмемъ за основаніе число 4; тогда:

$4^2 = 16$; поэтому $\text{Log } 16 = 2$;
$4^3 = 64$; » $\text{Log } 64 = 3$;
$4^1 = 4$; » $\text{Log } 4 = 1$;
$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$; » $\text{Log } 2 = \frac{1}{2}$.
$4^{-1} = \frac{1}{4}$; » $\text{Log } \frac{1}{4} = -1$;
$4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$. » $\text{Log } \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

2°. Если за основаніе возьмемъ число 10, то:

$10^1 = 10$; поэтому $\text{Log } 10 = 1$;
$10^2 = 100$; » $\text{Log } 100 = 2$;
$10^3 = 1000$; » $\text{Log } 1000 = 3$;
$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$; » $\text{Log } 0{,}1 = -1$;
$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0{,}01$; » $\text{Log } 0{,}01 = -2$ и т. п.

3°. $\text{Log}_8 4096 = 4$, потому что $8^4 = 4096$.

4°. $\text{Log}_{64} 8 = \frac{1}{2}$, потому что $64^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8$.

299. Нѣкоторыя свойства логариѳмовъ. Основаніе a логариѳмовъ мы будемъ всегда предполагать числомъ положительнымъ, неравнымъ 1 [1]). Кромѣ того, условимся еще въ слѣдующемъ. Если x есть дробь, то степень a^x представляетъ собою корень, котораго показатель равенъ знаменателю дроби. Корни, какъ мы видѣли (§ 246), имѣютъ нѣсколько значеній, изъ которыхъ только одно—ариѳметическое. Условимся, говоря о логариѳмахъ, придавать степенямъ съ дробными показателями только ариѳметическое значеніе; при этомъ условіи степень a^x обладаетъ многими замѣчательными свойствами. Укажемъ тѣ изъ нихъ, которыми намъ придется пользоваться впослѣдствіи. При этомъ для простоты мы ограничимся тѣмъ случаемъ, когда основаніе логариѳмовъ больше 1.

1) Если $a = 1$, то выраженіе a^x не можетъ дать никакого числа, кромѣ 1

I. Всякое положительное число имѣетъ логариѳмъ (раціональный или ирраціональный) и притомъ единственный.

Ограничимся разъясненіемъ, что для всякаго положительнаго числа N, если оно не имѣетъ точнаго раціональнаго логариѳма, можно найти два приближенныя раціональныя значенія логариѳма съ какою угодно степенью точности $^1/_n$, т.-е. что можно найти двѣ такія ариѳметическія дроби $^k/_n$ и $^{k+1}/_n$, при которыхъ (если $a>1$) имѣетъ мѣсто двойное неравенство:

$$a^{\frac{k}{n}}<N<a^{\frac{k+1}{n}}.$$

Обозначивъ черезъ n какое-нибудь большое цѣлое число (напр., 1000), вообразимъ два неограниченныхъ ряда чиселъ:

$$a^0=1,\ a^{\frac{1}{n}},\ a^{\frac{2}{n}},\ a^{\frac{3}{n}},\dots\ a^{\frac{k}{n}},\ a^{\frac{k+1}{n}},\dots \qquad (1)$$

$$a^0=1,\ a^{-\frac{1}{n}},\ a^{-\frac{2}{n}},\ a^{-\frac{3}{n}},\dots\ a^{-\frac{k}{n}},\ a^{-\frac{k+1}{n}},\dots \qquad (2)$$

Каждый изъ этихъ рядовъ представляетъ собою безконечную геометрическую прогрессію; въ первой прогрессіи знаменатель есть $a^{\frac{1}{n}}$, во второй $a^{-\frac{1}{n}}$. Такъ какъ, согласно предположенію, $a>1$, то и $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{1}$, т.-е. $a^{\frac{1}{n}}>1$; поэтому прогрессія (1) есть возрастающая. Но если $a^{\frac{1}{n}}>1$, то $\frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}<1$, т.-е. $a^{-\frac{1}{n}}<1$; значитъ, прогрессія (2) есть убывающая. По мѣрѣ удаленія отъ начала ряда (§ 286) члены прогрессіи (1), увеличиваясь, начиная отъ 1, могутъ сдѣлаться больше всякаго даннаго числа, а члены прогрессіи (2), уменьшаясь, начиная отъ 1, могутъ сдѣлаться меньше всякаго даннаго положительнаго числа. Изъ этого слѣдуетъ, что какъ бы велико или какъ бы мало ни было положительное число N, мы всегда встрѣтимъ въ нашихъ прогрессіяхъ (въ первой, если $N>1$, и во второй, если $N<1$), или членъ, который въ точности равняется числу N, или же два рядомъ стоящихъ члена, между которыми заключается N. Пусть окажется, что нѣкоторый

членъ прогрессіи, напр., $a^{\frac{k}{n}}$, будетъ въ точности равенъ числу N; тогда дробь $\frac{k}{n}$ будетъ точнымъ логариѳмомъ числа N. Если же этого не случится, то какіе-нибудь два рядомъ стоящихъ члена, напр., $a^{\frac{k}{n}}$ и $a^{\frac{k+1}{n}}$ будутъ удовлетворять двойному неравенству:

$$a^{\frac{k}{n}} < N < a^{\frac{k+1}{n}}$$

(если $N < 1$, то $a^{-\frac{k}{n}} > N > a^{-\frac{k+1}{n}}$); тогда числа $^k/_n$ и $^{k+1}/_n$ будутъ приближенными раціональными значеніями Log N съ точностью до $\frac{1}{n}$.

Конечно, вычисленіе членовъ указанныхъ прогрессіей съ цѣлью дѣйствительнаго нахожденія приближеннаго логариѳма даннаго числа N было бы крайне затруднительно; на практикѣ логариѳмы вычисляются несравненно болѣе простыми пріемами, указываемыми въ высшей математикѣ.

Если $a < 1$, то можно повторить все сказанное, съ тою только разницею что тогда прогрессія (1) будетъ убывающая, а прогрессія (2) возрастающая, и, слѣд., если $N > 1$, то подходящія къ N числа найдутся во второй прогрессіи, а если $N < 1$, то въ первой.

Вполнѣ аналогично тому, какъ это было сдѣлано нами раньше (§ 204) для показанія существованія ирраціональнаго $\sqrt[m]{A}$, мы можемъ и здѣсь разъяснить (пользуясь для наглядности числовой прямой), что существуетъ нѣкоторое ирраціональное число α, которое больше всякаго раціональнаго числа вида $^k/_n$ и меньше всякаго раціональнаго числа вида $^{k+1}/_n$, если $^k/_n$ и $^{k+1}/_n$ суть приближенныя раціональныя значенія *Log* N съ точностью до $^1/_n$. Тогда степень a^α, согласно опредѣленію ирраціональныхъ показателей (§ 295), представляетъ собою такое число, которое (если $a > 1$) больше всякой степени вида $a^{\frac{k}{n}}$ и меньше всякой степени вида $a^{\frac{k+1}{n}}$; но такое число, согласно опредѣленію приближенныхъ значеній *Log* N, есть N; значитъ, $a^\alpha = N$, т.-е. *Log* $N = \alpha$.

II. Бо́льшему логариѳму соотвѣтствуетъ бо́льшее число.

Дѣйствительно, при $a > 1$ прогрессія (1) есть возрастающая, а прогрессія (2) убывающая; изъ первой видно, что съ увеличе-

ніемъ показателя при a члены возрастаютъ, а изъ второй—что съ уменьшеніемъ показателя [1]) члены убываютъ.

III. Логариѳмы чиселъ, бо́льшихъ единицы, положительны, а логариѳмы чиселъ, меньшихъ единицы, отрицательны.

Дѣйствительно, при $a > 1$ число N надо искать въ прогрессіи (1), когда оно больше 1, и въ прогрессіи (2), когда оно меньше 1 но показатели въ первой прогрессіи всѣ положительные, а во второй — всѣ отрицательные; значитъ, когда $N > 1$, логариѳмъ этого числа долженъ быть положительный, а когда $N < 1$, то логариѳмъ его окажется отрицательнымъ.

IV. При увеличеніи логариѳма отъ 0 до $+\infty$ числа возрастаютъ отъ 1 до $+\infty$, а при уменьшеніи логариѳма отъ 0 до $-\infty$ числа уменьшаются отъ 1 до 0.

Дѣйствительно, при $a > 1$ изъ возрастающей прогрессіи (1) видно, что когда показатели (логариѳмы), оставаясь положительными, возрастають отъ 0 безпредѣльно (отъ 0 до $+\infty$), числа, оставаясь положительными, возрастаютъ отъ 1 безпредѣльно (отъ 1 до $+\infty$); изъ убывающей прогрессіи (2) видно, что когда показатели, оставаясь отрицательными, уменьшаются отъ 0 безпредѣльно (отъ 0 до $-\infty$), числа, оставаясь положительными, уменьшаются отъ 1 и могутъ быть сдѣланы менѣе всякаго даннаго положительнаго числа (уменьшаются отъ 1 до 0). Это свойство логариѳмовъ можно выразить такими условными равенствами:

$$a^{+\infty} = +\infty, \quad a^{-\infty} = 0$$

или

$$\text{Log}(+\infty) = +\infty, \quad \text{Log}\,0 = -\infty.$$

Замѣчаніе. При $a < 1$ свойства II, III и IV будутъ обратны указаннымъ, а именно: бо́льшему логариѳму соотвѣтствуетъ меньшее число;

логариѳмы чиселъ, бо́льшихъ единицы, отрицательны, а меньшихъ единицы—положительны;

при увеличеніи логариѳма отъ 0 до $+\infty$ числа убываютъ отъ 1 до 0, а при уменьшеніи логариѳма отъ 0 до $-\infty$ числа возрастаютъ отъ 1 до $+\infty$

V. Отрицательныя числа не имѣютъ логаризмовъ.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ предыдущаго свойства логариѳмовъ видно, что при измѣненіи логариѳма отъ $-\infty$ до $+\infty$ числа

---

[1]) Вспомнимъ, что отрицательныя числа считаются тѣмъ меньше, чѣмъ абсолютная величина ихъ больше.

измѣняются отъ 0 до $+\infty$; но между $-\infty$ и $+\infty$ заключаются, очевидно, всевозможные логариѳмы, тогда какъ между 0 и $+\infty$ содержатся числа только положительныя. Значитъ, нѣтъ такого логариѳма, которому соотвѣтствовало бы какое-нибудь отрицательное число (вспомнимъ, что основаніе a мы всегда предполагаемъ числомъ положительнымъ).

VI. **Логариѳмъ самого основанія равенъ 1, а логариѳмъ единицы есть 0.**

Это видно изъ равенствъ: $a^1 = a$ и $a^0 = 1$,

откуда: $\text{Log}_a a = 1$, $\text{Log}\, 1 = 0$ [1]).

300. Логариѳмы произведенія, частнаго, степени и корня находятся на основаніи слѣдующихъ 4-хъ теоремъ.

При ихъ доказательствѣ примемъ во вниманіе, что каковы бы ни были показатели степени (т.-е. цѣлые или дробные, положительные или отрицательные, раціональные или ирраціональные), дѣйствія надъ степенями совершаются по тѣмъ же правиламъ, какія были выведены для показателей цѣлыхъ положительныхъ, т.-е. при умноженіи показатели одинаковыхъ буквъ складываются, при дѣленіи вычитаются и т. д.

Теорема I. **Логариѳмъ произведенія равенъ суммѣ логариѳмовъ сомножителей.**

Док. Пусть N, N_1, N_2 будутъ какія-нибудь числа, имѣющія соотвѣтственно логариѳмы: x, x_1, x_2 по одному и тому же основанію a. По опредѣленію логариѳма можемъ положить:

$$N = a^x, \quad N_1 = a^{x_1}, \quad N_2 = a^{x_2}.$$

Перемноживъ эти равенства, получимъ:

$$NN_1N_2 = a^x a^{x_1} a^{x_2} = a^{x+x_1+x_2},$$

откуда: $\text{Log}\,(NN_1N_2) = x + x_1 + x_2$

---

[1]) Мы приняли безъ доказательства, что $a^0 = 1$, основываясь на значеніи нулевого показателя, приданномъ ему условно въ статьѣ о дѣленіи одинаковыхъ степеней одного и того же числа (§ 66). Но выраженіе a^0 можно разсматривать въ другомъ значеніи, а именно, какъ предѣлъ, къ которому стремится степень a^x по мѣрѣ приближенія x къ 0. Въ теоріи предѣловъ доказывается, что этотъ предѣлъ равенъ 1.

но $\quad x = \text{Log}\,N, \quad x_1 = \text{Log}\,N_1, \quad x_2 = \text{Log}\,N_2;$

поэтому $\quad \text{Log}\,(NN_1N_2) = \text{Log}\,N + \text{Log}\,N_1 + \text{Log}\,N_2.$

Очевидно, это разсужденіе вполнѣ примѣнимо къ какому угодно числу сомножителей.

Теорема 2. Логариѳмъ дроби равенъ логариѳму числителя безъ логариѳма знаменателя (другими словами: логариѳмъ частнаго равенъ логариѳму дѣлимаго безъ логариѳма дѣлителя).

Док. Раздѣливъ почленно два равенства:

$$N = a^x, \quad N_1 = a^{x_1}$$

получимъ:
$$\frac{N}{N_1} = \frac{a^x}{a^{x_1}} = a^{x-x_1},$$

откуда:
$$\text{Log}\,\frac{N}{N_1} = x - x_1 = \text{Log}\,N - \text{Log}\,N_1.$$

Отсюда видно, что **логариѳмъ правильной дроби** (т.-е. такой, у которой числитель меньше знаменателя) **есть число отрицательное.**

Въ частности: $\text{Log}\,\frac{1}{N} = \text{Log}\,1 - \text{Log}\,N = 0 - \text{Log}\,N = -\text{Log}\,N.$

Теорема 3. Логариѳмъ степени равенъ логариѳму возвышаемаго числа, умноженному на показателя степени.

Док. Возвысимъ обѣ части равенства $N = a^x$ въ n-ую степень:

$$N^n = (a^x)^n = a^{xn},$$

откуда:
$$\text{Log}\,N^n = xn = (\text{Log}\,N)n.$$

Теорема 4. Логариѳмъ корня равенъ логариѳму подкоренного числа, дѣленному на показателя корня.

Эту теорему можно разсматривать, какъ слѣдствіе предыдущей. Дѣйствительно:

$$\text{Log}\,\sqrt[n]{N} = \text{Log}\,N^{\frac{1}{n}} = (\text{Log}\,N).\frac{1}{n} = \frac{\text{Log}\,N}{n}.$$

301. Логариѳмированіе алгебраическаго выраженія. Логариѳмировать данное алгебраическое выраженіе значитъ выразить логариѳмъ его посредствомъ логариѳмовъ отдѣльныхъ

чиселъ, составляющихъ выраженіе. Это можно сдѣлать, пользуясь теоремами предыдущаго параграфа. Пусть, напр., требуется логариѳмировать слѣдующее выраженіе, которое обозначимъ одною буквой N:

$$N = \frac{3a^2\sqrt{b\sqrt[3]{x}}}{4m^3\sqrt[6]{y}}.$$

Замѣтивъ, что это выраженіе представляетъ собою дробь, пишемъ на основаніи теоремы 2-й:

$$\mathrm{Log}\,N = \mathrm{Log}\left(3a^2\sqrt{b\sqrt[3]{x}}\right) - \mathrm{Log}\,(4m^3\sqrt[6]{y}).$$

Затѣмъ, примѣняя теорему 1-ю, получимъ:

$$\mathrm{Log}\,N = \mathrm{Log}\,3 + \mathrm{Log}\,a^2 + \mathrm{Log}\,\sqrt{b\sqrt[3]{x}} - \mathrm{Log}\,4 - \mathrm{Log}\,m^3 - \mathrm{Log}\,\sqrt[6]{y},$$

и далѣе, по теоремѣ 3-ей и 4-й:

$$\mathrm{Log}\,N = \mathrm{Log}\,3 + 2\,\mathrm{Log}\,a + \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\left(b\sqrt[3]{x}\right) - \mathrm{Log}\,4 - 3\,\mathrm{Log}\,m -$$
$$- \frac{1}{6}\,\mathrm{Log}\,y = \mathrm{Log}\,3 + 2\,\mathrm{Log}\,a + \frac{1}{2}\left(\mathrm{Log}\,b + \frac{1}{3}\,\mathrm{Log}\,x\right) - \mathrm{Log}\,4 -$$
$$- 3\,\mathrm{Log}\,m - \frac{1}{6}\,\mathrm{Log}\,y = \mathrm{Log}\,3 + 2\,\mathrm{Log}\,a + \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,b + \frac{1}{6}\,\mathrm{Log}\,x -$$
$$- \mathrm{Log}\,4 - 3\,\mathrm{Log}\,m - \frac{1}{6}\,\mathrm{Log}\,y.$$

Логариѳмировать можно только такія выраженія, которыя представляютъ собою произведеніе, частное, степень или корень, но не сумму и не разность. Поэтому, когда желаютъ логариѳмировать сумму или разность, то, если возможно, предварительно приводятъ ихъ къ виду, удобному для логариѳмированія, напр., преобразуя ихъ въ произведеніе; такъ:

$$\mathrm{Log}\,(a^2 - b^2) = \mathrm{Log}\,[(a+b)(a-b)] = \mathrm{Log}\,(a+b) + \mathrm{Log}\,(a-b);$$
$$\mathrm{Log}\,(a^2 + 2a + 1 - b^2) = \mathrm{Log}\,[(a+1)^2 - b^2] =$$
$$\mathrm{Log}\,[(a+1+b)(a+1-b)] = \mathrm{Log}\,(a+1+b) + \mathrm{Log}\,(a+1-b).$$

Умѣя логариѳмировать алгебраическія выраженія, мы можемъ обратно, **по данному результату логариѳмирова-**

нія найти выраженіе X, которое при логариѳмированіи дало этотъ результатъ; такъ, если намъ дано, что

$$\mathrm{Log}\,x = \mathrm{Log}\,a + \mathrm{Log}\,b - 3\,\mathrm{Log}\,c - \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,d,$$

то на основаніи тѣхъ же теоремъ находимъ:

$$x = \frac{ab}{c^3\sqrt{d}}.$$

302. Система логариѳмовъ. Системою логариѳмовъ наз. совокупность логариѳмовъ, вычисленныхъ по одному и тому же основанію, для всѣхъ чиселъ натуральнаго ряда, начиная съ 1 и кончая какимъ-нибудь большимъ числомъ. Употребительны двѣ системы: система натуральныхъ логариѳмовъ и система десятичныхъ логариѳмовъ. Въ первой, по нѣкоторымъ причинамъ (которыя уясняются только въ высшей математикѣ) за основаніе взято ирраціональное число 2,7182818 28... (обозначаемое обыкновенно буквою e); во второй за основаніе принято число 10. Логариѳмы первой системы обладаютъ многими теоретическими достоинствами; логариѳмы второй системы, называемые иначе обыкновенными, весьма удобны для практическихъ цѣлей [1].

303. Переходъ отъ одной системы логариѳмовъ къ другой. Имѣя логариѳмы, вычисленные по одному какому-нибудь основанію a, мы легко можемъ найти логариѳмы по новому основанію b. Пусть N есть какое-нибудь число и

$$\mathrm{Log}_a N = x, \quad \mathrm{Log}_b N = y,$$

т.-е.

$$N = a^x \text{ и } N\, b^y,$$

---

[1]) Натуральные логариѳмы называются также **Неперовыми** по имени изобрѣтателя логариѳмовъ, шотландскаго математика Непера (1550—1617), а десятичные логариѳмы—**Бригговыми**, по имени профессора Бригга (современника и друга Непера), впервые составившаго таблицы этихъ логариѳмовъ. Должно, однако, замѣтить, что Неперовы логариѳмы не тождественны натуральнымъ а только связаны съ ними нѣкоторымъ соотношеніемъ. Впервые натуральные логариѳмы были введены послѣ смерти Непера, въ 1619 г., учителемъ математики въ Лондонѣ, **Джономъ Спейделемъ**. Въ слѣдующемъ, 1620 году, швейцарецъ Бюрги опубликовалъ свои таблицы, составленныя имъ независимо отъ Непера.

Замѣтимъ, что въ 1914 году исполнилось трехсотлѣтіе изобрѣтенія логариѳмовъ, такъ какъ таблицы Непера были имъ опубликованы въ 1614 году (подъ названіемъ: „Mirifici logarithmorum canonis descriptio").

откуда: $a^x = b^y$.

Логариѳмируемъ это равенство по основанію a:

$$x = y.\ \mathrm{Log}_a b,\ \text{откуда: } y = \frac{x}{\mathrm{Log}_a b} = x.\ \frac{1}{\mathrm{Log}_a b}.$$

Такимъ образомъ, чтобы получить новый логариѳмъ, достаточно прежній логариѳмъ умножить на число, равное 1, дѣленной на логариѳмъ новаго основанія, взятый по старому основанію; такое число наз. **модулемъ** новой системы относительно старой. Для перехода отъ десятичныхъ логариѳмовъ къ натуральнымъ модуль оказывается $= 2{,}3025851\ldots$, а для обратнаго перехода отъ натуральныхъ логариѳмовъ къ десятичнымъ модуль есть $0{,}4342945\ldots$

304. Значеніе логариѳмическихъ таблицъ. Имѣя таблицы, въ которыхъ помѣщены логариѳмы цѣлыхъ чиселъ по одному и тому же основанію, отъ 1 до какого-нибудь большого числа, мы можемъ производить надъ числами дѣйствія умноженія, дѣленія, возвышенія въ степень и извлеченія корня проще, чѣмъ обыкновеннымъ путемъ. Предположимъ, напр., что надо вычислить $\sqrt[3]{ABC}$, гдѣ A, B и C суть данныя цѣлыя числа. Вмѣсто того, чтобы производить умноженіе и затѣмъ извлеченіе кубичнаго корня, мы можемъ, пользуясь таблицами логариѳмовъ, найти сначала $\mathrm{Log}\sqrt[3]{ABC}$, основываясь на разложеніи:

$$\mathrm{Log}\sqrt[3]{ABC} = \frac{1}{3}(\mathrm{Log}A + \mathrm{Log}B + \mathrm{Log}C).$$

Найдя въ таблицахъ отдѣльно $\mathrm{Log}A$, $\mathrm{Log}B$ и $\mathrm{Log}C$, сложивъ ихъ и раздѣливъ сумму на 3, получимъ $\mathrm{Log}\sqrt[3]{ABC}$. По этому логариѳму, пользуясь тѣми же таблицами, можемъ найти соотвѣтствующее число, точное или приближенное.

Такимъ образомъ, руководствуясь изложенными выше теоремами о логариѳмѣ произведенія, частнаго, степени и корня мы можемъ, помощью логариѳмическихъ таблицъ, свести умноженіе на сложеніе, дѣленіе на вычитаніе, возвышеніе въ степень на умноженіе и извлеченіе корня на дѣленіе.

На практикѣ употребительны таблицы десятичныхъ логариѳмовъ: мы ихъ будемъ обозначать знакомъ Log, не проставляя

внизу этого знака основаніе 10: оно будетъ подразумѣваться Чтобы понять устройство и употребленіе этихъ таблицъ предварительно разсмотримъ нѣкоторыя свойства десятичныхъ логариѳмовъ.

ГЛАВА II.

Свойства десятичныхъ логариѳмовъ.

305. Эти свойства мы выразимъ слѣдующими 5-ю теоремами

Теорема I. Логариѳмъ цѣлаго числа, изображаемаго единицей съ однимъ или съ нѣсколькими нулями, есть цѣлое число, заключающее столько единицъ, сколько нулей въ числѣ.

Док. Такъ какъ $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10000$...

и вообще $$10^m = 1\overbrace{0...00}^{m \text{ нулей}},$$

то $\text{Log } 10 = 1$, $\text{Log } 100 = 2$, $\text{Log } 1000 = 3$, $\text{Log } 10000 = 4$

и вообще $$\text{Log } 1\overbrace{00...00}^{m \text{ нулей}} = m.$$

Теорема 2. Логариѳмъ цѣлаго числа, не изображаемаго единицею съ нулями, не можетъ быть выраженъ точно ни цѣлымъ числомъ, ни дробнымъ.

Док. Пусть N есть такое цѣлое число, которое не выражается 1-ею съ нулями, и допустимъ, что $\text{Log } N$ въ точности равняется какому-нибудь раціональному числу, напр., дроби $\frac{p}{q}$, гдѣ p и q суть цѣлыя числа. Въ такомъ случаѣ

$$10^{\frac{p}{q}} = N; \text{ слѣд., } \left(10^{\frac{p}{q}}\right)^q = N^q, \text{ т.-е. } 10^p = N^q.$$

Но такое равенство невозможно, потому что число 10^p разлагается только на множителей 2 и 5, повторенныхъ p разъ, а число N^q не можетъ дать такого разложенія (потому что N не есть 1 съ нулями); поэтому невозможно допущеніе, что $\text{Log } N$ выражается точно.

Логариѳмъ цѣлаго числа, которое не выражается 1-ею съ нулями, есть число ирраціональное, и, слѣд., при помощи раціональныхъ чиселъ оно можетъ быть выражено только приближенно. Обыкновенно выражаютъ его въ видѣ десятичной дроби съ 5 или 7 десятичными знаками. Цѣлое число логариѳма наз. его **характеристикой**, а дробная десятичная часть — **мантиссой**.

Теорема 3. Характеристика логариѳма цѣлаго или смѣшаннаго числа содержитъ столько единицъ, сколько въ цѣлой части числа находится цыфръ безъ одной.

Док.: Пусть, напр., имѣемъ число 5683,7.

Такъ какъ $10000 > 5683{,}7 > 1000$,

то $\operatorname{Log} 10000 > \operatorname{Log} 5683{,}7 > \operatorname{Log} 1000$,

т.-е. $4 > \operatorname{Log} 5683{,}7 > 3$;

значитъ: $\operatorname{Log} 5683{,}7 = 3 +$ полож. правильн. дробь,

т.-е. характеристика $\operatorname{Log} 5683{,}7 = 3$.

Пусть вообще число N въ цѣлой своей части содержитъ m цыфръ; тогда

$$10^m > N > 10^{m-1},$$

слѣд., $\operatorname{Log} 10^m > \operatorname{Log} N > \operatorname{Log} 10^{m-1}$;

откуда: $m > \operatorname{Log} N > m - 1$;

значитъ: $\operatorname{Log} N = (m - 1) +$ полож. прав. дробь,

т.-е. характ. $\operatorname{Log} N = m - 1$.

Примѣры. 1) характ. $\operatorname{Log} 7{,}3 = 0$; 2) характер. $\operatorname{Log} 28^3/_4 = 1$; характ. $\operatorname{Log} 4569372 = 6$, и т. п.

306. Преобразованіе отрицательнаго логариѳма въ логариѳмъ съ положительной мантиссой и обратно. Прежде чѣмъ излагать теоремы 4-ю и 5-ю, сдѣлаемъ слѣдующее разъясненіе. Мы видѣли (§ 299, III), что логариѳмъ правильной дроби есть число отрицательное; значитъ, онъ состоитъ изъ отрицательной характеристики и отрицательной мантиссы (напр., — 2,08734). Теперь замѣтимъ, что отрицательный логариѳмъ всегда можно преобразовать такъ, что у него мантисса будетъ положительной, а отрицательной останется только одна характеристика. Для этого

достаточно прибавить къ его мантиссѣ положительную единицу, а къ характеристикѣ—отрицательную (отъ чего, конечно величина логариѳма не измѣнится). Если, напр., мы имѣем отрицательный логариѳмъ —2,08734, то можно написать:

$$-2,08734 = -2 - 0,08734 = -2 - 1 + 1 - 0,08734 =$$
$$= -(2+1) + (1 - 0,08734) = -3 + 0,91266$$

или сокращенно: $-2,08734 = \overset{-1+1}{-2,08734} = \bar{3},91266$.

Для указанія того, что у логариѳма отрицательна тольк одна характеристика, ставятъ **надъ ней** минусъ; такъ, вмѣст того, чтобы написать:— $3 + 0,91266$, пишутъ короче $\bar{3},91266$ [1])

Изъ разсмотрѣнія этого преобразованія можно вывести слѣдующее **правило: чтобы у отрицательнаго логариѳма сдѣлат мантиссу положительной, достаточно увеличить на 1 абсолютну величину характеристики и вмѣсто данной мантиссы взять ея дополненіе до 1** (т.-е. такое число, которое получается отъ вычитанія данной мантиссы изъ 1). Это дополненіе получится, если послѣднюю значащую цыфру данной мантиссы вычтемъ изъ 10, всѣ остальныя изъ 9. Такимъ образомъ, мы можемъ прямо писать:

$$-2,56248 = \bar{3},43752, \quad -0,00830 = \bar{1},99170 \text{ и т. п.}$$

На практикѣ логариѳмы чиселъ, меньшихъ 1, всегда представляютъ такъ, чтобы у нихъ мантиссы были положительны.

Обратно, всякій логариѳмъ съ отрицательной характеристикой и положительной мантиссой можно превратить въ отрицательный. Для этого достаточно къ положительной мантиссѣ приложить отрицательную единицу, а къ отрицательной характеристикѣ—положительную; такъ, очевидно, можно написать:

$$\bar{7},83026 = -7 + 0,83026 = -7 + 1 - 1 + 0,83026 =$$
$$= (-7 + 1) - (1 - 0,83026) = -6 - 0,16974 = -6,16974$$

или сокращенно: $\bar{7},83026 = \overset{+1-1}{\bar{7},83026} = -6,16974$ [2]).

---

1) Такое число произносятъ такъ: 3 съ минусомъ, 91266 стотысячныхъ.

2) **Замѣчаніе для памяти.** Для выполненія преобразованій, указанныхъ въ двухъ послѣднихъ параграфахъ, приходится прибавлять $+1$ и -1.

Изъ разсмотрѣнія этого преобразованія можно вывести слѣдующее **правило: чтобы у логариѳма съ отрицательной характеристикой, но съ положительной мантиссой, сдѣлать и мантиссу отрицательной, достаточно уменьшить на 1 абсолютную величину характеристики и, вмѣсто данной мантиссы, взять ея дополненіе до 1.** Замѣтивъ это, можемъ прямо писать:

Напр.: $\overline{3},57401 = -2,42599$; $\overline{1},70830 = -0,29170$; и т. п.

307. Теорема 4. Отъ умноженія или дѣленія числа на 10^n (n—цѣлое число) положительная мантисса логариѳма остается безъ измѣненія, а характеристика увеличивается или уменьшается на n единицъ.

Док.: Такъ какъ

$$\operatorname{Log}(N.10^n) = \operatorname{Log} N + \operatorname{Log} 10^n, \quad \operatorname{Log}\frac{N}{10^n} = \operatorname{Log} N - \operatorname{Log} 10^n$$

и

$$\operatorname{Log} 10^n = n,$$

то

$$\operatorname{Log}(N.10^n) = \operatorname{Log} N + n, \quad \operatorname{Log}\frac{N}{10^n} = \operatorname{Log} N - n,$$

Такъ какъ n есть цѣлое число, то прибавленіе n не измѣняетъ мантиссы, а только увеличиваетъ характеристику на n единицъ; съ другой стороны, если условимся въ томъ случаѣ, когда нужно отъ логариѳма отнять цѣлое число, отнимать его отъ характеристики, оставляя мантиссу всегда положительной, то вычитаніе n также не измѣняетъ мантиссы, а только уменьшаетъ характеристику на n единицъ.

Слѣдствія. 1) **Положительная мантисса логариѳма десятичнаго числа не измѣняется отъ перенесенія въ числѣ запятой,** потому что перенесеніе запятой равносильно умноженію или дѣ-

---

одно изъ этихъ чиселъ къ характеристикѣ, а другое къ мантиссѣ. Чтобы не ошибиться, къ чему прибавить +1 и къ чему —1, полезно всегда обращать вниманіе на мантиссу заданнаго логариѳма и разсуждать такъ: пусть въ заданномъ логариѳмѣ мантисса отрицательна, а надо ее сдѣлать положительной; тогда къ ней, конечно, слѣдуетъ прибавить +1, а потому къ характеристикѣ надо прибавить —1; пусть въ заданномъ логариѳмѣ мантисса будетъ положительна, а надо ее сдѣлать отрицательной (весь логариѳмъ долженъ быть отрицательный); тогда къ ней слѣдуетъ добавить —1, а, слѣдовательно, къ характеристикѣ +1.

ленію на цѣлую степень 10-ти. Такимъ образомъ, логариѳм чиселъ:

$$0{,}00423,\quad 0{,}0423,\quad 0{,}423,\quad 4{,}23,\quad 42{,}3,\quad 423$$

отличаются только характеристиками, но не мантиссами, пр условіи, что мантиссы положительны.

2) **Мантиссы чиселъ, имѣющихъ одну и ту же значащую част но отличающихся только нулями на концѣ, одинаковы;** такъ, лога риѳмы чиселъ: 23, 230, 2300, 23000 отличаются только харак теристиками.

Теорема 5. 1) **Когда десятичная дробь выражается 1-ею с предшествующими нулями (0,1; 0,01; 0,001; и. т. д.), то логариѳм ея равенъ цѣлому отрицательному числу, содержащему столько отрі цательныхъ единицъ, сколько есть нулей въ изображеніи десятич ной дроби, считая въ томъ числѣ и 0 цѣлыхъ.**

2) **Логариѳмъ всякой другой правильной десятичной дроби, есл его мантисса сдѣлана положительной, содержитъ въ характеристик столько отрицательныхъ единицъ, сколько есть нулей въ изображе ніи десятичной дроби передъ первой значащей цифрой, считая в томъ числѣ и 0 цѣлыхъ.**

Доказательство. 1) Такъ какъ

$$0{,}1=\frac{1}{10}=10^{-1},\quad 0{,}01=\frac{1}{100}=10^{-2},\quad 0{,}001=\frac{1}{1000}=10^{-3},\ldots$$

и вообще

$$\overbrace{0{,}00\ldots0}^{m\text{ нулей}}1=\frac{1}{1\underbrace{00\ldots0}_{m\text{ нулей}}}=\frac{1}{10^m}=10^{-m}$$

то

$$\operatorname{Log}0{,}1=-1,\quad \operatorname{Log}0{,}01=-2,\quad \operatorname{Log}0{,}001=-3,\ldots$$

и вообще

$$\operatorname{Log}\overbrace{0{,}00\ldots0}^{m\text{ нулей}}1=-m.$$

2) Пусть имѣемъ десятичную дробь $A=\overbrace{0{,}00\ldots0}^{m\text{ нулей}}\alpha\beta\ldots$, у ко торой передъ первой значащей цифрой стоятъ m нулей, счи тая въ томъ числѣ и 0 цѣлыхъ (α, β,...— какія-нибудь зна чащія цифры). Тогда очевидно, что

$$\overbrace{0{,}00\ldots0}^{m-1\text{ нулей}}1>\overbrace{0{,}00\ldots0}^{m\text{ нулей}}\alpha\beta>\overbrace{0{,}00\ldots0}^{m\text{ нулей}}1.$$

Слѣд.: $\operatorname{Log} \overbrace{0,00\ldots01}^{m-1 \text{ нулей}} > \operatorname{Log} A > \operatorname{Log} \overbrace{0,00\ldots01}^{m \text{ нулей}}$,

т.-е. $-(m-1) > \operatorname{Log} A > -m$;

значитъ: $\operatorname{Log} A = -m +$ полож. правильн. дробь,

т.-е. характ. $\operatorname{Log} A = -m$ (при полож. мантиссѣ).

Примѣры. 1) характ. $\operatorname{Log} 0{,}25 = -1$; 2) характ. $\operatorname{Log} 0{,}0000487 = -5$; и т. п.

308. Замѣчаніе. Изъ изложенныхъ теоремъ слѣдуетъ, что характеристику логариѳма цѣлаго числа и десятичной дроби мы можемъ находить безъ помощи таблицъ; вслѣдствіе этого въ логариѳмическихъ таблицахъ помѣщаются только однѣ мантиссы; кромѣ того, такъ какъ нахожденіе логариѳмовъ дробей сводится къ нахожденію логариѳмовъ цѣлыхъ чиселъ (логариѳмъ дроби=логариѳму числителя безъ логариѳма знаменателя), то въ таблицахъ помѣщаются мантиссы логариѳмовъ только цѣлыхъ чиселъ.

ГЛАВА III.

Устройство и употребленіе таблицъ.

309. Устройство таблицъ. Опишемъ вкратцѣ устройство и употребленіе пятизначныхъ таблицъ, изданныхъ Пржевальскимъ. Эти таблицы содержатъ мантиссы логариѳмовъ всѣхъ цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до 10009, вычисленныя съ 5 десятичными знаками, при чемъ послѣдній изъ этихъ знаковъ увеличенъ на 1 во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда 6-й десятичный знакъ долженъ бы оказаться 5 или болѣе 5; слѣд., **пятизначныя таблицы даютъ приближенныя мантиссы съ точностью до $\frac{1}{2}$ стотысячной доли** (съ недостаткомъ или съ избыткомъ [1]).

---

[1]) Въ нѣкоторыхъ таблицахъ (напр. „Чихановъ — Таблицы пятизначныхъ логариѳмовъ") мантиссы, взятыя съ избыткомъ, отмѣчены черточкой, поставленной подъ послѣдней цифрой мантиссы.

Для рѣшенія большинства практическихъ задачъ вполнѣ достаточно пользоваться **четырехзначными** таблицами (напр., таблицами, составленными **В. И**

На первой страницѣ помѣщены числа отъ 1 до 100 въ столбцахъ съ надписью N (numerus—число). Противъ каждаго числа въ столбцахъ съ надписью Log., находятся мантиссы, вычисленныя съ 5 десятичными знаками.

Слѣдующія страницы устроены иначе. Въ первомъ столбцѣ, подъ рубрикою N, помѣщены числа отъ 100 до 1000, а рядомъ съ ними въ столбцѣ, надъ которымъ стоитъ цифра 0, находятся соотвѣтствующія мантиссы: первыя двѣ цыфры мантиссъ, общія нѣсколькимъ логариѳмамъ, написаны только разъ, а остальныя три цифры помѣщены рядомъ съ числомъ, находящимся въ столбцѣ N. Эти же мантиссы принадлежатъ числамъ, которыя получатся, если къ числамъ, стоящимъ подъ рубрикою N, приписать справа 0. Такъ, мантисса логар. 5690 будетъ та же, что и у числа 569, т.-е. 75511 (стр. 17). Слѣдующіе столбцы съ надписями надъ ними 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, служатъ для нахожденія логариѳмовъ четырехзначныхъ чиселъ (и пятизначныхъ до 10009), оканчивающихся на эти значащія цифры, при чемъ первыя три цифры каждаго изъ этихъ чиселъ помѣщены въ столбцѣ N, а послѣднюю надо искать наверху, въ ряду цифръ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Напр., чтобы найти мантиссу логариѳма числа 5673, надо отыскать въ столбцѣ N число 567 (стр. 17) и наверху цыфру 3; въ пересѣченіи горизонтальной линіи, идущей отъ 567, съ вертикальной линіей, опущенной отъ цифры 3, находятся три послѣднія цифры мантиссы (381), первыя же ея цифры надо искать въ столбцѣ подъ цифрою 0, на одной горизонтальной линіи, или выше; такъ, для числа 5673 первыя двѣ цифры мантиссы будутъ 75, а послѣднія 381, такъ что всѣ 5 знаковъ будутъ 75381. Если передъ послѣдними тремя цифрами мантиссы стоитъ въ таблицахъ звѣздочка, то это значитъ, что первыя двѣ цифры надо брать ниже горизонтальной линіи, на которой расположены послѣднія цифры мантиссы. Такъ, для числа 5758 мантисса будетъ 76027 (стр. 17).

Лорченко и Н. В Оглоблинымъ, Кіевъ, 1910 г.). Въ случаяхъ, требующихъ очень большой точности, пользуются иногда семизначными таблицами (напр., Логариѳмически-тригонометрическое руководство барона Георга Вега). Способъ пользованія такими таблицами объясненъ во введеніи къ таблицамъ.

22*

310. По данному десятичному числу найти логариѳмъ. Характеристику логариѳма цѣлаго числа или десятичной дроби мы выставляемъ непосредственно, руководствуясь указанными нами свойствами десятичныхъ логариѳмовъ

При нахожденіи мантиссы мы примемъ во вниманіе, что положеніе запятой въ десятичномъ числѣ, а также и число нулей на концѣ цѣлаго числа, не оказываютъ вліянія на мантиссу (§ 307, слѣдствія); поэтому мы можемъ отбросить запятую въ десятичной дроби и въ цѣломъ числѣ зачеркнуть всѣ нули если они есть на концѣ числа. Тогда могутъ представиться слѣдующіе 2 случая:

1°. Цѣлое число не превосходитъ 10009. Тогда мантисса находится прямо изъ таблицъ. Напр.:

$$\text{Log } 82 = 1{,}91381; \quad \text{Log } 0{,}082 = \bar{2}{,}91381 \text{ (стран. 1)};$$
$$\text{Log } 2560 = 3{,}40824; \quad \text{Log } 256000 = 5{,}40824 \text{ (стран. 7)};$$
$$\text{Log } 7416 = 3{,}87017; \quad \text{Log } 74{,}16 = 1{,}87017 \text{ (стран. 23)}.$$

Найденная мантисса будетъ точна до $^1/_2$ стотысячной доли.

2°. Цѣлое число превосходитъ 10009. Тогда мантисса находится на основаніи слѣдующей истины, которую мы примемъ безъ доказательства:

если числа болѣе 1000, и разности между ними не превосходятъ 1 то безъ чувствительной ошибки можно принять, что разности между числами пропорціональны разностямъ между ихъ логариѳмами [1]).

---

1) Справедливость этого предложенія до нѣкоторой степени можетъ быть провѣрена просмотромъ самихъ логариѳмическихъ таблицъ. Въ этихъ таблицахъ, начиная со 2-й страницы, помѣщены четырехзначныя цѣлыя числа въ ихъ натуральномъ порядкѣ, т.-е. числа эти возрастаютъ на 1. Если бы разности между числами были строго пропорціональны разностямъ между ихъ логариѳмами, то, при возрастаніи чиселъ на 1, ихъ логариѳмы возрастали бы на одно и то же число. Просматривая таблицы, замѣчаемъ, что разности между сосѣдними мантиссами хотя и не остаются одинаковыми на протяженіи всѣхъ таблицъ, однако, измѣняются очень медленно; напр., для всѣхъ чиселъ помѣщенныхъ на страницахъ 19, 20, 21 и 22 таблицъ, разности между сосѣдними мантиссами оказываются только или 6, или 7 стотысячныхъ. Если же эти разности почти постоянны для чиселъ, отличающихся на 1 (и превосходящихъ 1000), то онѣ должны быть еще болѣе постоянными для чиселъ, отличающихся менѣе, чѣмъ на 1 (и превосходящихъ 1000).

Принявъ это, положимъ, что требуется найти логариѳмъ числа 74,2354 которое, по отбрасываніи запятой, даетъ цѣлое число, превосходящее 10009.

Перенесемъ въ немъ запятую на столько знаковъ, чтобы въ цѣлой части образовалось наибольшее число, какое только можно найти въ таблицахъ; въ нашемъ примѣрѣ для этого достаточно перенести запятую вправо на два знака. Теперь будемъ искать

$$\text{Log } 7423{,}54 = ?$$

Выписываемъ изъ таблицъ (стр. 23) мантиссу логариѳма числа 7423 и находимъ такъ называемую **табличную разность**, т.-е. разность между взятой мантиссой и слѣдующей бо́льшей (соотвѣтствующей числу 7424). Для этого вычитаемъ (въ умѣ) изъ 064 (изъ трехъ послѣднихъ цифръ мантиссы числа 7424) число 058 (три послѣднія цифры мантиссы числа 7423); находимъ 6 (стотысячн.). Значитъ:

$$\text{Log } 7423 = 3{,}87058;$$
$$\text{Log } 7424 = 3{,}87058 + 6 \text{ (стотыс.)}.$$

Обозначимъ буквою Δ то неизвѣстное число стотысячныхъ, которое надо приложить къ Log 7423, чтобы получить Log 7423,54; тогда можемъ написать:

$$\text{Log } 7423{,}54 = 3{,}87058 + \Delta \text{ (стотыс.)}.$$

Изъ этихъ равенствъ мы видимъ, что если число 7423 увеличится на 1, то логариѳмъ его увеличится на 6 (стотыс.), а если то же число увеличится на 0,54, то логариѳмъ его увеличится на Δ (стотыс.).

На основаніи указанной выше пропорціональности можемъ написать пропорцію:

$$\Delta : 6 = 0{,}54 : 1; \quad \text{откуда: } \Delta = 6 . 0{,}54 = 3{,}24 \text{ (стотыс.)}.$$

Приложивъ къ 3,87058 найденную разность, мы найдемъ Log 7423,54. Такъ какъ мы ограничиваемся 5-ю десятичными знаками мантиссы, то въ числѣ 3,24 можемъ отбросить цифры 2 и 4, представляющія собою милліонныя и десятимилліонныя

доли; при этомъ, для уменьшенія ошибки, будемъ всегда руководствоваться слѣдующимъ правиломъ: если отбрасываемая часть больше (или равна) 5 милліонныхъ, то, отбрасывая ее мы увеличимъ на 1 оставшееся число стотысячныхъ; въ противномъ же случаѣ оставимъ число стотысячныхъ безъ измѣненія. Такимъ образомъ:

$$\text{Log } 7423{,}54 = 3{,}87058 + 3 \text{ стотыс.} = 3{,}87061.$$

Такъ какъ Log 74,2354 долженъ имѣть ту же самую мантиссу, а характеристика его должна быть 1, то

$$\text{Log } 74{,}2354 = 1{,}87061$$ [1].

Правило. Чтобы найти мантиссу даннаго цѣлаго числа, имѣющаго 5 или болѣе цифръ, выписываютъ изъ таблицъ мантиссу числа составленнаго первыми 4 цифрами даннаго числа, и къ ней прибавляютъ произведеніе табличной разности на десятичную дробь, образованную остальными цифрами даннаго числа, при чемъ вмѣсто точной величины этого произведенія берутъ ближайшее къ нему цѣлое число

Для болѣе строгаго вывода этого правила повторимъ въ общемъ видѣ тѣ разсужденія, посредствомъ которыхъ выше мы нашли Log 74,2354.

Перенесемъ въ данномъ десятичномъ числѣ запятую такъ, чтобы она стояла послѣ 4-й цифры слѣва; тогда число представится въ видѣ суммы $n + h$, въ которой n есть четырехзначное цѣлое число, а h—десятичная дробь меньшая 1. Найдемъ въ таблицахъ мантиссу M (стотыс.), соотвѣтствующую цѣлому числу n, и опредѣлимъ (вычитаніемъ въ умѣ) табличную разность d между взятой мантиссой M и слѣдующей бо́льшей мантиссой (соотвѣтствующей числу $n + 1$). Тогда мы можемъ написать:

$$\text{Log } n = 3 + \frac{M}{10^5};$$

$$\text{Log } (n + 1) = 3 + \frac{M + d}{10^5}.$$

Обозначимъ буквою Δ неизвѣстное число стотысячныхъ, которое надо приложить къ Log n, чтобы получить Log $(n + h)$; тогда:

$$\text{Log } (n + h) = 3 + \frac{M + \Delta}{10^5}.$$

---

[1]) **Нахожденіе по двумъ рядомъ стоящимъ въ таблицахъ числамъ числа промежуточнаго наз. вообще интерполированіемъ**; интерполированіе, описанное въ этомъ параграфѣ (и далѣе въ § 312), наз. **пропорціональнымъ**, такъ какъ оно основано на допущеніи, что измѣненіе мантиссы пропорціонально измѣненію числа.

Изъ написанныхъ 3-хъ равенствъ заключаемъ, что если число n увеличится на 1, то логариѳмъ его увеличится на d (стотыс.), а если то же число n увеличится на h, то логариѳмъ его увеличится на Δ (стотыс.). На основаніи нашего допущенія пропорціональности получимъ:

$$\Delta : d = h : 1;\ \text{откуда: } \Delta = dh \text{ (стотыс.)}.$$

Значитъ:
$$\mathrm{Log}\,(n+h) = 3 + \frac{M + dh}{10^5} \qquad [1]$$

Произведеніе dh рѣдко есть цѣлое число; большею частью оно есть цѣлое число съ дробью. Въ этомъ случаѣ, довольствуясь 5-ю десятичными знаками мантиссы, мы вмѣсто точной величины произведенія dh условимся брать ближайшее къ нему цѣлое число (хотя бы оно было и больше dh). Обозначивъ это ближайшее цѣлое число буквою δ, мы можемъ приближенный логариѳмъ выразить такъ:

$$\mathrm{Log}\,(n+h) = 3 + \frac{M + \delta}{10^5} \qquad [2]$$

Остается теперь, если нужно, замѣнить характеристику 3 другихъ числомъ сообразно теоремамъ о характеристикѣ (3-я теор. § 305 и 5-я теор. § 307).

311. Употребленіе пропорціональныхъ частей.

Произведеніе табличной разности на десятичную дробь, о которомъ говорится въ предыдущемъ правилѣ, можно производить весьма просто при помощи такъ называемыхъ partes proportionales (пропорціональныхъ частей), помѣщенныхъ въ таблицахъ въ крайнемъ правомъ столбцѣ съ надписью P. P. Такъ, на стран. 23-й мы находимъ въ этомъ столбцѣ двѣ колонки, надъ которыми стоятъ цыфры: надъ одной 6, надъ другой 5. Эти цифры означаютъ табличныя разности (въ стотысячныхъ доляхъ) между двумя рядомъ стоящими мантиссами, помѣщенными на этой страницѣ. Подъ каждой изъ этихъ табличныхъ разностей выписаны произведенія ея на 0,1, на 0,2, на 0,3..., наконецъ, на 0,9. Такъ, найдя въ колонкѣ, надъ которою стоитъ разность 6, съ лѣвой стороны цифру 8, означающую 0,8, и взявъ справа отъ этой цифры число 4,8, мы получимъ произведеніе 6.0,8.

Чтобы при помощи этихъ P. P. умножить, положимъ, 6 на 0,54, достаточно найти въ колонкѣ произведеніе 6.0,5 и потомъ произведеніе 6.0,04. Первое находимъ прямо: оно равно 3,0; чтобы получить второе, примемъ во вниманіе, что произведеніе 6.0,4 въ 10 разъ меньше произведенія 6.0,4; это послѣднее

находимъ въ P. P.; оно равно 2,4; слѣд., 6.0,4 = 0,24. Сложивъ 3,0 и 0,24, найдемъ полное произведеніе 6.0,54.

Вычисленіе всего удобнѣе располагать такъ:

Число.		Логариѳмъ.	
7423.		3,87058	$d = 6$
5		30	
4		24	
7423,54.		3,87061;	
Log 74,2354.		=1,87061.	

Подъ числомъ 7423 мы подписали цыфру 5, отступивъ на одно мѣсто вправо, потому что эта цыфра означаетъ 0,5; точно такъ же цыфра 4 отодвинута еще на одно мѣсто вправо, такъ какъ она означаетъ 0,04. Подъ мантиссой 87058 подписаны числа 30 и 24, при чемъ каждое изъ нихъ отодвинуто на одно мѣсто вправо, такъ какъ 30 означаетъ 3,0 стотысячныхъ, а 24 означаетъ 0,24 стотысячныхъ. Направо помѣщена табличная разность 6 (обыкновенно она обозначается буквою d).

Приведемъ еще примѣръ: найти Log 28739,06.

Число.		Логариѳмъ.	
2873.		3,45834	$d = 15$
9.		135	
0.		0	
6		90	
2873,906		3,45848;	
Log 28739,06		4,45848.	

Складывая 4 и 3 (стотыс.), мы увеличили сумму на 1, такъ какъ первая изъ отбрасываемыхъ цифръ (милліонныхъ) есть 5.

311,a. Предѣлъ погрѣшности приближеннаго логариѳма. Сначала мы опредѣлимъ погрѣшность приближеннаго логариѳма [1] (§ 310), въ которомъ произведеніе dh берется точнымъ, а затѣмъ найдемъ погрѣшность приближенія [2], въ которомъ вмѣсто точной величины dh взято ближайшее цѣлое число; при этомъ мы предположимъ что число $n + h$, логариѳмъ котораго требуется найти, есть число точное.

Погрѣшность приближенія [1] обусловливается 2-мя причинами:

1) допущенная нами истина о пропорціональности разностей между числами разностямъ соотвѣтствующихъ логариѳмовъ не вполнѣ вѣрна;

2) въ таблицахъ помѣщены не точныя мантиссы, а приближенныя (съ точностью до $^1/_2$ стотысячной доли).

Погрѣшность, происходящая отъ 1-й причины, оказывается, по изслѣдованіи ея, настолько ничтожной, что она вообще не вліяетъ на 5-й десятичный знакъ мантиссы; поэтому въ дальнѣйшемъ мы на нее не будемъ обращать вниманія. Чтобы судить о величинѣ погрѣшности, происходящей отъ 2-й причины, мы составимъ выраженіе для точнаго логариѳма числа $n+h$, а затѣмъ сравнимъ его съ приближеннымъ логариѳмомъ [1].

Обозначимъ буквами α и α' положительныя или отрицательныя числа стотысячныхъ долей, которыя надо приложить: первое—къ табличной мантиссѣ $\operatorname{Log} n$, а второе—къ табличной мантиссѣ $\operatorname{Log}(n+1)$, чтобы получить точныя мантиссы этихъ чиселъ. Тогда мы можемъ написать слѣдующія точныя равенства:

$$\operatorname{Log} n = 3 + \frac{M+\alpha}{10^5}; \qquad \operatorname{Log}(n+1) = 3 + \frac{M+d+\alpha'}{10^5};$$

гдѣ абсолютныя величины чиселъ α и α' должны быть меньше $^1/_2$. Изъ этихъ равенствъ видно, что когда число n увеличивается на 1, тогда точный логариѳмъ его увеличивается на $d+\alpha'-\alpha$ (стотыс.); значитъ, когда число n увеличивается на h, точный логариѳмъ его долженъ увеличиться на такое число Δ (стотыс.), которое удовлетворяетъ пропорціи:

$$\Delta : (d+\alpha'-\alpha) = h : 1; \quad \text{откуда } \Delta = (d+\alpha'-\alpha)\,h.$$

Слѣд., точная величина логариѳма числа $n+h$ будетъ:

$$\operatorname{Log}(n+h) = 3 + \frac{M+\alpha}{10^5} + \frac{(d+\alpha'-\alpha)\,h}{10^5}.$$

Приведя дроби къ одному знаменателю и сдѣлавъ перестановку членовъ въ числителѣ, мы можемъ найденное выраженіе представить такъ:

$$\operatorname{Log}(n+h) = 3 + \frac{M+dh}{10^5} + \frac{\alpha+h\alpha'-h\alpha}{10^5}.$$

Сравнивая это выраженіе съ приближеніемъ [1] параграфа 310-го, находимъ, что погрѣшность этого приближенія равна:

$$\frac{\alpha+h\alpha'-h\alpha}{10^5} = \frac{\alpha(1-h)+h\alpha'}{10^5}.$$

Такъ какъ абс. величины чиселъ α и α' меньше $^1/_2$, то эта погрѣшность, очевидно, меньше дроби:

$$\frac{\frac{1}{2}(1-h)+h\cdot\frac{1}{2}}{10^5} = \frac{\frac{1}{2}(1-h+h)}{10^5} = \frac{\frac{1}{2}}{10^5} = \frac{1}{2} \text{ стотысячной}.$$

Таковъ предѣлъ погрѣшности приближеннаго логариѳма [1]. Переходя теперь отъ этого приближенія къ приближенному логариѳму [2], т.-е. замѣняя точную величину произведенія dh ближайшимъ къ нему цѣлымъ

числомъ, мы дѣлаемъ еще ошибку, но меньшую $^1/_2$. Слѣд., предѣлъ погрѣшности приближеннаго логариѳма [2] будетъ:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1 \text{ (стотысяч.)}.$$

Такимъ образомъ, **если логариѳмъ берется прямо изъ таблицъ, то предѣлъ его погрѣшности есть $^1/_2$ стотысячной доли (§ 310, 1°); если же логариѳмъ получается посредствомъ вычисленія, то предѣлъ погрѣшности есть 1 стотысячная доля.**

311, *b*. Случай, когда данное число неточное.

Въ предыдущемъ параграфѣ мы предполагали, что сумма $n+h$ есть точное данное число. Но часто бываетъ, что требуется отыскать логариѳмъ числа, заданнаго только приближенно (напр., требуется найти $Log\ \pi$, принимая за π приближенное его значеніе 3,142). Въ этомъ случаѣ къ погрѣшности приближеннаго логариѳма прибавляется еще погрѣшность, происходящая отъ неточности самого числа. Опредѣлимъ предѣлъ этой послѣдней погрѣшности.

Обозначимъ буквою φ погрѣшность приближеннаго числа $n+h$, т.-е. то положительное или отрицательное число, которое надо приложить къ приближенному числу $n+h$, чтобы получить точное число; при этомъ мы допустимъ, что φ есть настолько малая дробь, что сумма $n+h+\varphi$ остается, какъ и сумма $n+h$, заключенной между цѣлыми числами n и $n+1$. Мы видѣли (§ 311, *a*), что если число n увеличивается на 1, то точный логариѳмъ его увеличивается на $d+\alpha'-\alpha$ (стотысячныхъ); значитъ, если число увеличится на φ, то точный логариѳмъ его долженъ увеличиться на такое число Δ (стотыс.), которое удовлетворяетъ пропорціи:

$$\Delta:(d+\alpha'-\alpha)=\varphi:1;\ \text{откуда: } \Delta=\varphi\,(d+\alpha'-\alpha)\ \text{(стотыс.)}.$$

Слѣд.,
$$\mathrm{Log}\,(n+h+\varphi)=\mathrm{Log}\,(n+h)+\varphi\,(d+\alpha'-\alpha).$$

Значитъ, когда мы вмѣсто $Log\,(n+h+\varphi)$ беремъ $Log\,(n+h)$, мы дѣлаемъ ошибку, равную $\varphi\,(d+\alpha'-\alpha)$ стотысячныхъ. Ошибка эта, очевидно, менѣе

$$|\,\varphi\,|\left(d+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=|\,\varphi\,|\,(d+1)\ \text{(стотысячныхъ)},$$

гдѣ $|\,\varphi\,|$ есть абсолютная величина погрѣшности самого приближеннаго числа $n+h$ (или ея предѣлъ).

Конечно, къ этой погрѣшности надо приложить ту, которая происходитъ отъ неточности приближеннаго логариѳма числа $n+h$, и предѣлъ которой, какъ мы видѣли, есть или $^1/_2$ стотысячной, или 1 стотысячная, смотря по тому, берется ли мантисса логариѳма прямо изъ таблицъ, или вычисляется помощью пропорціональныхъ разностей.

Такимъ образомъ, предѣлъ окончательной погрѣшности будетъ:

$$\left.\begin{array}{r} |\,\varphi\,|\,(d+1)+\frac{1}{2} \\ \text{или } |\,\varphi\,|\,(d+1)+1 \end{array}\right\}\ \text{стотысячныхъ}.$$

Не должно забывать, что φ есть погрѣшность того числа $n+h$, которое получится, когда въ данномъ десятичномъ числѣ запятую поставимъ послѣ 4-й цифры слѣва.

Примѣръ. Найти Log π, принимая $\pi=3{,}142$ (съ точностью до $^1/_2$ тысяч.).

Перенеся запятую послѣ 4-й цифры слѣва, получимъ четырехзначное число 3142, точное до $^1/_2$ цѣлой единицы (точное число должно было бы быть $3142+\varphi$, гдѣ $\varphi<{}^1/_2$). Изъ таблицъ находимъ:

$$\text{Log } 3142=3{,}49721;\ d=13.$$

Предѣлъ погрѣшности этого логариѳма, происходящей отъ неточности числа, равенъ:

$$|\varphi|\,(13+1)<{}^1/_2\cdot 14=7 \text{ (стотыс.)}.$$

Такъ какъ предѣлъ погрѣшности самого логариѳма (взятаго непосредственно изъ таблицъ) есть $^1/_2$ стотысячной, то предѣлъ окончательной погрѣшности будетъ $7^1/_2$ стотыс. <8 стотыс.

Такимъ образомъ:

$\text{Log } (3142+\varphi)=3{,}49721$ (съ точн. до 8 ед. посл. разр.).

Слѣд., $\text{Log } 3{,}142=0{,}49721$ (съ точн. до 8 ед. посл. разр.).

Значитъ, точная величина *Log* π заключается:

$$0{,}49721+0{,}00008>\text{Log }\pi>0{,}49721-0{,}00008,$$

т.-е.
$$0{,}49729>\text{Log }\pi>0{,}49713.$$

Семизначный логариѳмъ числа π равенъ 0,4971499. Найденный нами приближенный логариѳмъ 0,49721 разнится отъ этого на 0,0000601, что, дѣйствительно, меньше 0,00008.

312. По данному логариѳму найти десятичное число. Пусть требуется найти N Log $\bar{1}{,}51001$, т.-е. найти число (Numerus), котораго логариѳмъ равенъ $\bar{1}{,}51001$ [1]). Не обращая пока вниманія на характеристику, отыскиваемъ въ таблицахъ сначала первыя двѣ цифры мантиссы, а потомъ и остальныя три. Оказывается, что въ таблицахъ есть мантисса 51001, соотвѣтствующая числу 3236. Принявъ во вниманіе характеристику, окончательно пишемъ:

$$\bar{1}{,}51001=\text{Log } 0{,}3236,$$

---

[1] Фразу „найти число, котораго логариѳмъ равенъ a" замѣняютъ иногда болѣе короткой: „найти антилогариѳмъ a". Значитъ, антилогариѳмомъ a наз. число, котораго логариѳмъ равенъ a; его можно обозначать такъ: N Log a (т.-е. *Numerus Log a*).

что можно также записать и такъ:

$$N\,\mathrm{Log}\,\bar{1},51001 = 0,3236.$$

Чаще случается, что данная мантисса не находится въ таблицахъ. Пусть, напр., намъ данъ логариѳмъ, у котораго мантисса есть 59499, не встрѣчающаяся въ таблицахъ, и какая-нибудь характеристика (напр., 2). Тогда искомое число можно найти простымъ вычисленіемъ, подобнымъ тому, которымъ мы находили логариѳмъ числа, не помѣщающагося въ таблицахъ.

Предположимъ сначала, что характеристика даннаго логариѳма есть 3, т.-е. данный логариѳмъ есть 3,59499. Беремъ изъ таблицъ мантиссу 59494, ближайшую меньшую къ данной, выписываемъ четырехзначное число 3935, соотвѣтствующее ей, и опредѣляемъ (вычитаніемъ въ умѣ) табличную разность 12 (стотыс.) между взятой мантиссой и слѣдующей большей (соотвѣтствующей числу 3936). Такимъ образомъ:

$$3,59494 = \mathrm{Log}\,3935;$$
$$3,59494 + 12 \text{ стотыс.} = \mathrm{Log}\,3936.$$

Опредѣлимъ еще разность 5 (стотыс.) между данной мантиссой (59499) и мантиссой, взятой изъ таблицъ (59494), и обозначимъ буквою h ту неизвѣстную дробь, которую надо приложить къ числу 3935, чтобы логариѳмъ его увеличился на 5 (стотыс.). Тогда

$$3,59494 + 5 \text{ стотыс.} = \mathrm{Log}\,(3935 + h).$$

Изъ этихъ 3-хъ равенствъ усматриваемъ, что если логариѳмъ увеличивается на 12 (стотыс.), то соотвѣтствующее число увеличивается на 1, а если логариѳмъ увеличивается на 5 (стотыс.) то число увеличивается на h. На основаніи допущенной нами пропорціональности можемъ написать:

$$12 : 5 = 1 : h; \text{ откуда: } h = \frac{5}{12} = 0,4...$$

Значитъ, число, соотвѣтствующее логариѳму 3,59499, равно 3935 + 0,4... = 3935,4..., а такъ какъ характеристика даннаго

логариома есть 2, а не 3, то искомое число x равно 393,54..., что можно выразить такъ:

$$x = N\,\mathrm{Log}\,2{,}59499 = 393{,}54\ldots$$

Правило. Чтобы найти число по данному логариему, сначала находятъ въ таблицахъ ближайшую меньшую мантиссу и соотвѣтствующее ей четырехзначное число; затѣмъ къ этому числу прибавляютъ частное, выраженное десятичной дробью, отъ дѣленія разности между данной мантиссой и ближайшей меньшей на соотвѣтствующую табличную разность [1]; наконецъ, въ полученномъ числѣ ставятъ запятую сообразно характеристикѣ даннаго логариема.

Для строгаго вывода этого правила повторимъ въ общемъ видѣ разсужденія, посредствомъ которыхъ по логариему 2,59499 мы нашли соотвѣтствующее число.

Положимъ сначала, что у даннаго логариема характеристика есть 3 (и какая-нибудь мантисса, не находящаяся въ таблицахъ). Находимъ въ таблицахъ мантиссу M, меньшую данной мантиссы и ближайшую къ ней, выписываемъ соотвѣтствующее этой мантиссѣ цѣлое четырехзначное число n и находимъ (вычитаніемъ въ умѣ) табличную разность d (стотыс.) между взятой мантиссой M и слѣдующей бо́льшей мантиссой (соотвѣтствующей числу $n+1$). Такимъ образомъ:

$$3 + \frac{M}{10^5} = \mathrm{Log}\,n;$$

$$3 + \frac{M+d}{10^5} = \mathrm{Log}\,(n+1).$$

Опредѣлимъ еще разность Δ (стотыс.) между данной мантиссой и взятой въ таблицахъ мантиссой M и обозначимъ буквой h ту неизвѣстную дробь, которую надо приложить къ числу n, чтобы логариемъ его увеличился на Δ стотысячныхъ. Тогда:

$$3 + \frac{M+\Delta}{10^5} = \mathrm{Log}\,(n+h).$$

Изъ написанныхъ 3-хъ равенствъ видно, что если логариомъ увеличивается на d (стотыс.), то число увеличивается на 1; если же логариомъ увеличивается на Δ (стотыс.), то число увеличивается на h.

На основаніи допущенной нами пропорціональности можемъ написать:

$$d : \Delta = 1 : h; \text{ откуда: } h = \frac{\Delta}{d}.$$

---

[1] Частное это достаточно вычислить съ точностью до $^1/_2$ десятой, такъ какъ бо́льшая точность все равно не достигается (см. § 313, a).

Слѣд., искомое число будетъ:

$$n + h = n + \frac{\Delta}{d}.$$

Остается обратить дробь $\frac{\Delta}{d}$ въ десятичную, приписать ее къ цѣлому числу n и, если характеристика даннаго логариѳма не 3. а какое-нибудь иное число, перенести запятую сообразно теоремамъ о характеристикѣ.

313. Употребленіе пропорціональныхъ частей. Обращеніе h въ десятичную дробь можетъ быть выполнено при помощи Р. Р. Такъ, когда $h = {}^5/_{12}$, то при дѣленіи 5 на 12 мы задаемся вопросомъ: на какое число десятыхъ надо умножить 12, чтобы получить 5 или число, ближайшее къ 5? Это число десятыхъ мы найдемъ въ колонкѣ, надъ которою стоитъ число 12; отыскиваемъ въ ней съ правой стороны число, ближайшее къ 5; это будетъ 4,8. Слѣва отъ 4.8 стоитъ цыфра 4, которая представитъ собою число десятыхъ долей.

Вычисленіе всего удобнѣе располагать такъ:

Логариѳмъ.	Число.	
3,59499		
..94	3935	$d = 12$
5	4	
3,59499	3935,4.	
2,59499	393 54	

313, а. Предѣлъ погрѣшности числа, найденнаго по данному логариѳму. Предварительно замѣтимъ, что данный логариѳмъ, по которому требуется отыскать неизвѣстное число, только въ исключительныхъ случаяхъ есть логариѳмъ точный; вообще же это есть логариѳмъ приближенный (и погрѣшность его можетъ доходить до нѣсколькихъ стотысячныхъ долей, напр., тогда, когда этотъ логариѳмъ получился отъ сложенія нѣсколькихъ приближенныхъ логариѳмовъ, или отъ умноженія приближеннаго логариѳма на цѣлое число). Обозначимъ буквою ω то положительное или отрицательное число стотысячныхъ долей, которое надо приложить къ данной приближенной мантиссѣ $M + \Delta$, чтобы получить точную мантиссу $M + \Delta + \omega$. Допустимъ, что это число настолько невелико, что сумма $\Delta + \omega$ не превосходитъ табличной разности d; тогда искомое число заключено между n и $n + 1$ и, слѣд., оно есть сумма $n + h$, въ которой n есть четырехзначное число, взятое изъ таблицъ (мы предполагаемъ, что характеристика даннаго логариѳма есть 3) а слагаемое h представляетъ

собою нѣкоторую правильную дробь, которую требуется найти. Точны логариѳмъ числа $n+h$ мы можемъ выразить двояко: съ одной сторонь это есть

$$\operatorname{Log}(n+h)=3+\frac{M+\Delta+\omega}{10^5},$$

а съ другой стороны онъ равенъ:

$$\operatorname{Log}(n+h)=3+\frac{M+hd+\gamma}{10^5},$$

гдѣ абс. величина числа γ должна быть меньше $1/2$, потому что, какъ мы видѣли (§ 311, a), если возьмемъ за приближенный логариѳмъ числа $n+h$ сумму $3+\frac{M+hd}{10^5}$, то сдѣлаемъ погрѣшность, абс. величина которой меньше $1/2$ стотысячной.

Такимъ образомъ, мы можемъ написать уравненіе:

$$3+\frac{M+\Delta+\omega}{10^5}=3+\frac{M+hd+\gamma}{10^5},$$

изъ котораго находимъ:

$$\Delta+\omega=hd+\gamma \text{ и, слѣд., } h=\frac{\Delta+\omega-\gamma}{d}.$$

Такова точная величина дроби h; поэтому, беря вмѣсто этой величины приближеніе $h=\frac{\Delta}{d}$, найденное нами согласно правилу § 312, мы дѣлаемъ ошибку:

$$\frac{\Delta+\omega-\gamma}{d}-\frac{\Delta}{d}=\frac{\omega-\gamma}{d},$$

которая, очевидно, меньше дроби

$$\frac{|\omega|+1/2}{d},$$

гдѣ $|\omega|$ означаетъ абс. величину погрѣшности даннаго логариѳма (или ея предѣлъ), выраженную въ стотысячныхъ доляхъ.

Таковъ предѣлъ погрѣшности приближеннаго числа $n+\frac{\Delta}{d}$, въ которомъ дробь $\Delta:d$ оставлена въ точномъ видѣ. Предѣлъ этотъ превосходитъ 0,01, такъ какъ, очевидно:

$$\frac{|\omega|+1/2}{d}>\frac{1/2}{d}=\frac{1}{2d},$$

а величина d на всемъ протяженіи пятизначныхъ таблицъ меньше 45 и, слѣд.

$$\frac{1}{2d}>\frac{1}{90}>\frac{1}{100}.$$

Поэтому, обращая дробь $\frac{\Delta}{d}$ въ десятичную, безполезно находить цифру сотыхъ, а достаточно ограничиться цифрою десятыхъ, при чемъ для умень-

шенія ошибки лучше брать ближайшую цифру десятыхъ, т.-е. увеличиват цифру десятыхъ на 1 всякій разъ, когда цифра сотыхъ была бы 5 ил болѣе. При этомъ, конечно, мы вводимъ еще ошибку въ нѣсколько сотых (меньшую однако 5 сотыхъ, т.-е. $^1/_{20}$), такъ что предѣлъ окончательно погрѣшности найденнаго согласно правилу § 312 числа можно предста вить такъ:

$$\frac{|\omega| + ^1/_2}{d} + \frac{1}{20}.$$

Мы предполагали до сего времени, что характеристика даннаго лога риема есть 3, и что, слѣд., въ искомомъ десятичномъ числѣ запятая стои послѣ 4-й цифры слѣва. Когда характеристика будетъ иная, то въ най денномъ выше числѣ запятую придется перенести влѣво или вправо, т.-е раздѣлить число или умножить его на нѣкоторую степень 10. При этомъ конечно, погрѣшность результата также раздѣлится или умножится н ту же степень 10.

Ниже (§ 316, *a* и слѣд.) мы приложимъ все сказанное къ нѣкоторым примѣрамъ, при чемъ увидимъ, что иногда приходится считаться еще и с другими неточностями, кромѣ тѣхъ, о которыхъ мы говорили.

314. Дѣйствія надъ логариемами съ отрица тельными характеристиками. Сложеніе и вычитані не представляютъ никакихъ затрудненій, какъ это видно и. слѣдующихъ примѣровъ:

$$+\begin{array}{r}\bar{2},97346\\1,83027\\\hline 0,80373\end{array}\qquad +\begin{array}{r}\bar{3}\,83846\\\bar{5},98043\\\hline \bar{7},81889\end{array}\qquad -\begin{array}{r}\bar{1},03842\\5,96307\\\hline \bar{7},07535\end{array}\qquad -\begin{array}{r}0.00523\\\bar{4}.57369\\\hline 3,43154\end{array}$$

Не представляетъ никакихъ затрудненій также и умноже ніе логариема на положительное число; напр.,

$$\begin{array}{r}\bar{3},58376\\\times 9\\\hline \overline{22},25384\end{array}\qquad \begin{array}{r}\bar{2},47356\\\times 34\\\hline 189424\\142068\\\hline 16,10104\\-68\\\hline \overline{52}.10104\end{array}$$

Въ послѣднемъ примѣрѣ отдѣльно умножена положительная мантисса на 34, затѣмъ отрицательная характеристика на 34.

Если логариѳмъ съ отрицательной характеристикой и положительной мантиссой умножается на отрицательное число, то поступаютъ двояко: или предварительно данный логариѳмъ обращаютъ въ отрицательный, или же умножаютъ отдѣльно мантиссу и характеристику, и результаты соединяютъ вмѣстѣ, напримѣръ:

1) $\bar{3},56327 \cdot (-4) = -2,43673 \cdot (-4) = 9,74692;$

2) $\bar{3},56327 \cdot (-4) = +12 - 2,25308 = 9,74692.$

При дѣленіи могутъ представиться два случая: 1) отрицательная характеристика дѣлится и 2) не дѣлится на дѣлителя. Въ первомъ случаѣ отдѣльно дѣлятъ характеристику и мантиссу:

$$\overline{10},37846 : 5 = \bar{2},07569.$$

Во второмъ случаѣ прибавляютъ къ характеристикѣ столько отрицательныхъ единицъ, чтобы образовавшееся число дѣлилось на дѣлителя; къ мантиссѣ прибавляютъ столько же положительныхъ единицъ:

$$\bar{3},76081 : 8 = (-8 + 5,76081) : 8 = \bar{1},72010.$$

Это преобразованіе надо совершать въ умѣ, такъ что дѣйствіе располагается такъ:

$$\bar{3},76081 : 8 = \bar{1},72010 \text{ или } \bar{3},76081 \,|\, 8 \quad \bar{1},72010.$$

315. Замѣна вычитаемыхъ логариѳмовъ слагаемыми. При вычисленіи какого-нибудь сложнаго выраженія помощью логариѳмовъ, приходится нѣкоторые логариѳмы складывать, другіе вычитать; въ такомъ случаѣ, при обыкновенномъ способѣ совершенія дѣйствій, находятъ отдѣльно сумму слагаемыхъ логариѳмовъ, потомъ сумму вычитаемыхъ и изъ первой суммы вычитаютъ вторую. Напр., если имѣемъ:

$$\text{Log}\, x = 2,73058 - \bar{2},07406 + \bar{3},54646 - 8,35890,$$

то обыкновенное нахожденіе дѣйствій расположится такъ:

$$
\begin{array}{rrr}
+\;\begin{array}{r} 2,73058 \\ \bar{3},54646 \end{array} & +\;\begin{array}{r} \bar{2},07406 \\ 8,35890 \end{array} & -\;\begin{array}{r} 0,27704 \\ 6,43296 \end{array} \\
\hline
0,27704 & 6,43296 & \bar{7},84408 = \operatorname{Log} x.
\end{array}
$$

Есть однако возможность замѣнять вычитаніе сложеніем. Для этого достаточно поступить такъ, какъ поступаютъ, когда у отрицательнаго логарифма хотятъ сдѣлать мантиссу положительной (§ 306), т.-е. достаточно прибавить $+1$ къ отрицательной мантиссѣ и -1 къ характеристикѣ. Такъ,

$$-\bar{2},07406 = -\bar{2} - 0,07406 = -\bar{2} - 1 + (1 - 0,07406) =$$
$$= 2 - 1 + 0,92594 = 1,92594.$$

Точно такъ же: $-8,35890 = -\overset{-1+1}{8},35890 = \bar{9},64110.$

Отсюда выводимъ такое правило: чтобы вычесть логарифмъ, достаточно прибавить другой логарифмъ, который составляется изъ перваго такъ: характеристика увеличивается на 1, и результатъ берется съ противоположнымъ знакомъ, а всѣ цифры мантиссы вычитаются изъ 9, кромѣ послѣдней справа значащей цифры, которая вычитается изъ 10.

Руководствуясь этимъ правиломъ, можемъ прямо писать:

$$-\bar{2},07406 = 1,92594; \qquad -8,35890 = \bar{9},64110$$

и расположить вычисленіе въ нашемъ примѣрѣ такъ:

$$
\begin{array}{rr}
 & 2,73058 \\
 & 1,92594 \\
+ & \bar{3},54646 \\
 & \bar{9},64110 \\
\hline
 & \bar{7},84408 = \operatorname{Log} x.
\end{array}
$$

Примѣры вычисленій.

318. Примѣръ 1. Вычислить $x = \dfrac{\sqrt[3]{A.B^4}}{C^3.\sqrt[8]{D}}$

если $A = 0,821573$, $B = 0,04826$, $C = 0,0051275$ и $D = 7,24636$.

Логариѳмируемъ данное выраженіе:

$$\mathrm{Log}\, x = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}\, A + 4\,\mathrm{Log}\, B - 3\,\mathrm{Log}\, C - \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Log}\, D.$$

Теперь производимъ вычисленіе $\mathrm{Log}\, x$ и затѣмъ x:

Предварительныя вычисленія.

A)

Число.	Логариѳмъ	
8215	3,91461	$d = 5$
7	35	
3	15	
0,821573	$\bar{1}$,91465	
$\frac{1}{2}$ Log A .. =	$\bar{1}$,97155	

B)

$\mathrm{Log}\, 0{,}04826 = \bar{2}{,}68359$

$4\,\mathrm{Log}\, B \ldots = \bar{6}{,}73436$

C)

Число	Логариѳмъ.	
5127	3,70986	$d = 9$
5	45	
0,0051275	$\bar{3}$,70991	
3 Log C .. =	$\bar{7}$,12973	
— 3 Log C .. =	6,87027	

D)

Число.	Логариѳмъ.	
7246	3,86010	$d = 6$
3	18	
5	30	
7,24635	0,86012	
$\frac{1}{3}$ Log D ... =	0,28671	
— $\frac{1}{3}$ Log D .... =	$\bar{1}$,71329	

Окончательныя вычисленія

$\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\, A = \bar{1}{,}97155$

$4\,\mathrm{Log}\, B = \bar{6}{,}73436$

$-3\,\mathrm{Log}\, C = 6{,}87027$

$-\frac{1}{3}\,\mathrm{Log}\, D = \bar{1}{,}71329$

$\mathrm{Log}\, x = 1{,}28947$

$\mathrm{Log}\, x_1 = 3{,}28947$

Логариѳмъ.	Числа.	
3,28947		$d = 22$
87	1947	
$\overline{10}$	0,5	
3,28947	1947,5	
1,28947	19,475	

$x_1 = 1947{,}5$

$x = 19{,}475$

Замѣчаніе. При вычисленіяхъ помощью логариѳмовъ какого-нибудь сложнаго выраженія очень полезно, ради экономіи времени и мѣста, прежде чѣмъ обращаться къ таблицамъ предварительно выписать въ надлежащемъ порядкѣ все, что можно написать безъ помощи таблицъ. Желая, напр., вычислить

выраженіе, данное въ приведенномъ выше примѣрѣ 1-мъ, мы предварительно выписываемъ слѣдующее расположеніе вычисленій:

$$\mathrm{Log}\, x = \tfrac{1}{3}\mathrm{Log}\, A + 4\,\mathrm{Log}\, B - 3\,\mathrm{Log}\, C - \tfrac{1}{3}\mathrm{Log}\, D.$$

Предварительныя вычисленія.

A) Число. Логарифмъ.

8215.........3,..... $d=$
7..............
3..............
0,821573.......$\bar{1}$,
$\frac{1}{3}$Log *A* ......

B)

$\mathrm{Log}\, 0{,}04826 = \bar{2},$
$4\,\mathrm{Log}\, B =$

C) Число. Логарифмъ.

5127.......3,..... $d=$
5...........
0,0051275......3,.....
3 Log *C*......
— 3 Log *C*......

D) Число. Логарифмъ.

7246.........3,...... $d=$
3..............
5............
7,24635.....
$\frac{1}{3}$Log *D* ....
— $\frac{1}{3}$Log *D* ....

Окончательныя вычисленія.

$\frac{1}{3}$ Log *A* =.......
4 Log *B* =.......
— 3 Log *C* =.......
— $\frac{1}{3}$ Log *D* =.......
Log *x* =.......
Log x_1 =.......

Логарифмъ. Число.

3,............. $d=$
....
....

316,a. Предѣлъ погрѣшности. Сначала найдемъ предѣлъ погрѣшности числа $x_1 = 1947{,}4$, равный, какъ мы видѣли (§ 313,a):

$$\frac{|\omega| + \frac{1}{2}}{d} + \frac{1}{20}.$$

Значитъ, предварительно надо найти $|\omega|$, т.-е. предѣлъ погрѣшности приближеннаго логариѳма числа x_1 или—что все равно—предѣлъ погрѣшности приближеннаго логариѳма числа x (выраженный въ стотысячныхъ

холятъ). Логариѳмъ этотъ (какъ въ нашемъ примѣрѣ, такъ и въ большинствѣ другихъ примѣровъ) получается отъ сложенія нѣсколькихъ приближенныхъ слагаемыхъ: въ нашемъ примѣрѣ каждое изъ этихъ слагаемыхъ получается отъ умноженія приближеннаго логариѳма на точное число (цѣлое или дробное, положительное или отрицательное). Поэтому мы прежде всего уяснимъ себѣ слѣдующія 2 простыя истины приближенныхъ вычисленій:

I. За предѣлъ погрѣшности суммы приближенныхъ слагаемыхъ можно принять сумму абсолютныхъ величинъ погрѣшностей этихъ слагаемыхъ (или ихъ предѣловъ)

Положимъ, напр., что a, b, c,... будутъ приближенныя слагаемыя, о которыхъ мы не знаемъ, взяты ли они съ избыткомъ, или съ недостаткомъ но извѣстно, что абсолютныя величины погрѣшностей (или ихъ предѣловъ) этихъ слагаемыхъ суть соотвѣтвѣтственно числа α, β, γ,... Тогда точныя слагаемыя должны быть: $a \pm \alpha$, $b \pm \beta$, $c \pm \gamma$,... (гдѣ знаки $+$ и $-$ не находятся въ соотвѣтствіи); слѣд., приближенная сумма $a+b+c+\ldots$ разнится отъ точной суммы: $(a+\alpha)+(b\pm\beta)+(c\pm\gamma)+\ldots=(a+b+c+\ldots)+(\pm\alpha\pm\beta\pm\gamma\pm\ldots)$ на алгебраическую сумму $\pm\alpha\pm\beta\pm\gamma\pm\ldots$, которая очевидно, не больше ариѳметической суммы $\alpha+\beta+\gamma+\ldots$; значитъ, эту послѣднюю сумму можно принять за предѣлъ погрѣшности приближенной суммы.

II. За предѣлъ погрѣшности произведенія приближеннаго числа на точное можно принять произведеніе абсолютной величины погрѣшности приближеннаго сомножителя (или ея предѣла) на абсолютную величину точнаго сомножителя.

Такъ, пусть a есть приближенное число, абс. величина погрѣшности котораго есть α, и n — какое-нибудь точное число (цѣлое или дробное, положительное или отрицательное — все равно); тогда приближенное произведеніе an разнится отъ точнаго произведенія $(a\pm\alpha)n = an \pm \alpha n$ на число $\pm\alpha n$, а это число не превосходитъ произведенія α на абсолютную величину числа n.

Пользуясь этими двумя истинами и принявъ во вниманіе, что предѣлъ погрѣшности логариѳма, взятаго непосредственно изъ таблицъ, есть $^1/_2$ стотысячной (§ 310,1°), а логариѳма, найденнаго вычисленіемъ, есть 1 стотысячная, мы находимъ, что предѣлъ погрѣшности есть:

въ Log A... 1 стотыс.	въ Log C... 1 стотыс.
въ $^1/_3$ Log A... $^1/_3$ стотыс.	въ -3 Log C... 3 стотыс.
въ Log B... $^1/_2$ стотыс.	въ Log D... 1 стотыс.
въ 4 Log B... 2 »	въ $^1/_3$ Log D... $^1/_3+{}^1/_2={}^5/_6$ стотыс.
	въ $-{}^1/_3$ Log D... $^5/_6$ стотыс.

Для $^1/_3$ Log D (и, слѣд., для $-{}^1/_3$ Log D) къ предѣлу погрѣшности $^1/_3$ мы добавили еще дробь $^1/_2$, такъ какъ, дѣля Log $D = 0{,}86012$ на 3, мы въ частномъ округлили число стотысячныхъ, взявъ ближайшее цѣлое число, и слѣд., сдѣлали еще ошибку, меньшую $^1/_2$ стотысячной. Раньше, находя предѣлъ погрѣшности въ $^1/_3$ Log A, мы такого добавленія не сдѣлали, такъ какъ Log $A = \bar{1}{,}91465$ при дѣленіи на 3 даетъ цѣлое число стотысячныхъ

Теперь находимъ предѣлъ погрѣшности $Log\ x$ (и, слѣд., $Log\ x_1$):

$$|\omega| = {}^1/_3 + 2 + 3 + {}^2/_3 = 6^1/_3 \text{ (стотыс.)}.$$

Слѣд., предѣлъ погрѣшности числа x_1 есть

$$\frac{|\omega| + {}^1/_3}{a} + \frac{1}{20} = \frac{6^1/_3 + {}^1/_3}{22} + \frac{1}{20} = \frac{6^2/_3}{22} + \frac{1}{20} = \frac{20}{66} + \frac{1}{20} = \frac{400 + 66}{1320} =$$

$$= \frac{466}{1320} = 0{,}353\ldots < 0{,}4$$

Такъ какъ $x = x_1 \cdot \frac{1}{100}$, то предѣлъ погрѣшности въ x есть $0{,}4 \cdot \frac{1}{100} = 0{,}004$

Такимъ образомъ найденное нами для x приближенное число 19,474 разнится отъ точнаго числа менѣе, чѣмъ на 0,004. Такъ какъ мы не знаемъ съ недостаткомъ или съ избыткомъ найдено наше приближеніе, то можемъ только ручаться за то, что

$$19{,}474 + 0{,}004 > x > 19{,}474 - 0{,}004,$$

т.-е.

$$19{,}478 > x > 19{,}470$$

и потому, если положимъ: $x = 19{,}47$, то будемъ имѣть приближеніе съ недостаткомъ, съ точностью до 0,01.

316,6. Примѣръ 2. Вычислить:

$$x = (-2{,}31)^3 \sqrt[5]{72} = -(2{,}31)^3 \sqrt[5]{72}.$$

Такъ какъ отрицательныя числа не имѣютъ логариѳмовъ, то предварительно находимъ:

$$x' = (2{,}31)^3 \sqrt[5]{72}$$

по разложенію:

$$Log\ x' = 3\ Log\ 2{,}31 + \tfrac{1}{5}\ Log\ 72.$$

Предварительныя вычисленія.

$Log\ 2{,}31 = 0{,}36361$ | $Log\ 72 = 1{,}85733$

$3\ Log\ 2{,}31 = 1{,}09083$ | $\frac{1}{5}\ Log\ 72 = 0{,}37147$

Окончательныя вычисленія.

	Логариѳмъ.	Число.
$3\ Log\ 2{,}31 = 1{,}09083$	3,46230	
$\frac{1}{5}\ Log\ 72 = 0{,}37147$	25	2899
$Log\ x' = 1{,}46230$	5	.......0,3 $d = 15$
$Log\ x_1 = 3{,}46230$	3,46230	2899,3
	1,46230	28,993

$$x_1 = 2899{,}3$$
$$x' = 28{,}993$$
$$x = -28{,}993.$$

Предѣлъ погрѣшности. Такъ какъ логариѳмы чиселъ 2,31 и 72 берутся непосредственно изъ таблицъ, то предѣлъ погрѣшности каждаго изъ нихъ есть $^1/_2$ стотысячной. Поэтому:

предѣлъ погрѣшности въ 2 Log 2,31 есть $^2/_2$ стотыс.

$$^1/_2 \text{ Log } 72 \quad » \quad \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{6}{10} \quad »$$

$$\text{Log } x_1 \quad » \quad \frac{3}{5} + \frac{6}{10} = 2,1$$

Предѣлъ погрѣшности въ числѣ $x_1 = 2899,9$ равенъ:

$$\frac{|\omega| + ^1/_2}{d} + \frac{1}{20} = \frac{2,1 + 0,5}{15} + 0,05 = 0,178\ldots + 0,05 = 0,228.$$

Такъ какъ $x' = x_1 \cdot \frac{1}{100}$, то предѣлъ погрѣшности въ x' (и, слѣд., въ x) есть 0,00228.... < 0,003.

216,c. Примѣръ 3. Вычислить: $x = \sqrt[3]{\sqrt[5]{8} + \sqrt[4]{3}}$.

Сплошного логариѳмированія здѣсь примѣнить нельзя, такъ какъ подъ знакомъ корня стоитъ сумма. Въ подобныхъ случаяхъ вычисляютъ формулу по частямъ. Сначала находимъ $N = \sqrt[5]{8}$, потомъ $N_1 = \sqrt[4]{3}$; далѣе простымъ сложеніемъ опредѣляемъ $N + N_1$ и, наконецъ, вычисляемъ $\sqrt[3]{N + N_1}$:

$\text{Log } N = \frac{1}{5} \text{ Log } 8$

$\text{Log } 8 = 0,90309$

$\frac{1}{5} \text{ Log } 8 = 0,18062$

Логариѳм.	Число.	
3,18062		
41	1515	$d = 29$
21	0,7	
3,18062	1515,7	
0,18062	1,5157	
	$N = 1,5157$	

$\text{Log } N_1 = \frac{1}{4} \text{ Log } 3$

$\text{Log } 3 = 0,47712$

$\frac{1}{4} \text{ Log } 3 = 0,11928$

Логариѳм.	Число.	
3,11928		
26	1316	$d = 33$
2	0,1	
3,11928	1316,1	
0,11928	1,3161	
	$N = 1,3161$	

$$\text{Log } x = \text{Log } \sqrt[3]{N + N_1} = \frac{1}{3} \text{ Log } (1,5157 + 1,3161) = \frac{1}{3} \text{ Log } 2,8318$$

Число.	Логарифм.		Логарифм.	Число.	
2831	3,45194	$d=15$	3,15069		
8	12,0		45	1414	$d=31$
			24	0,8	
2831,8 . . .	3,45206		3,15062	1414,8	
2,8318 . . .	0,45206		0,15062	1,4148	
$\frac{1}{2}$ Log 2,8318 = 0,15069					
$x_1 = 1414,8$;			$x = 1,4148$.		

Предѣлъ погрѣшности. Вычисленіе предѣла погрѣш будемъ вести въ слѣдующей послѣдовательности.

1) Погрѣшность въ числѣ N (= 1,5457).

Погрѣшн. въ Log $8 < {}^1/_2$ стот.; погрѣшн. въ $\frac{1}{5}$ Log $8 < \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = 0,6$.

Погрѣшн. въ числѣ $1515,7 < \frac{|\omega| + {}^1/_2}{d} + \frac{1}{20} = \frac{0,6+0,5}{28} + 0,005 = 0,087..$

„ „ $1,5157 < 0,000087\ldots < 0,00009$

2) Погрѣшность въ числѣ N_1 (= 1,3161).

Погрѣшн. въ Log $3 < {}^1/_2$ стот.; погрѣш. въ ${}^1/_4$ Log $3 < {}^1/_8$ стот.

Погрѣшн. въ числѣ $1316,1 < \frac{|\omega| + {}^1/_2}{d} + \frac{1}{20} = \frac{{}^1/_8 + {}^1/_2}{33} + 0,05 = 0,068\ldots$

Погрѣшн. въ числѣ $1,3161 < 0,000068\ldots < 0,00007$.

3) Погрѣшность въ числѣ $N + N_1$ (= 2,8318);

$< 0,00009 + 0,00007 = 0,00016$

и, слѣд., погрѣшность въ числѣ $2831,8 < 0,16$.

4) Погрѣшность въ Log 2831,8 (и, слѣд., въ Log 2,8318).

Эта погрѣшность, выраженная въ стотысячныхъ доляхъ, должна быт меньше (§ 311, *b*):

$|\varphi|(d+1) + 1 = 0,16\,(15+1) + 1 = 3,56$ (стотыс.).

5) Погрѣшность въ $\frac{1}{2}$ Log 2,8318:

$< \frac{3,56}{2} + \frac{1}{2} = 1,18\ldots + 0,5 = 1,68\ldots <$ (2 стотыс.).

6) Погрѣшность въ числѣ $x_1 = 1413,8$:

$< \frac{|\omega| + {}^1/_2}{d} + \frac{1}{20} = \frac{2+0,5}{31} + 0,05 = 0,13\ldots < 0,14$.

7) Наконецъ, погрѣшность въ числѣ $x = 1,4148$

$< 0,00014$.

Такимъ образомъ точная величина x заключается:

$1,4148 + 0,00014 > x > 1,4148 - 0,00014$.

ГЛАВА IV.

Показательныя и логариѳмическія уравненія.

317. Показательными уравненіями называются такія, въ которыхъ неизвѣстное входитъ въ показателя степени, а логариѳмическими такія, въ которыхъ неизвѣстное входитъ подъ знакомъ Log.

Такія уравненія могутъ быть разрѣшаемы только въ частныхъ случаяхъ, при чемъ приходится основываться на свойствахъ логариѳмовъ и на томъ началѣ, что **если числа равны, то равны и ихъ логариѳмы** (когда основаніе не равно 1), **и** обратно: **если логариѳмы равны, то равны и соотвѣтствующія имъ числа.**

Примѣръ 1. Рѣшить уравненіе: $2^x = 1024$.

Логариѳмируемъ обѣ части уравненія:

$$x \operatorname{Log} 2 = \operatorname{Log} 1024; \quad x = \frac{\operatorname{Log} 1024}{\operatorname{Log} 2} = \frac{3{,}01030}{0{,}30103} = 10.$$

Примѣръ 2. Рѣшить уравненіе: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x} = 5$.

Подобно предыдущему находимъ:

$$(x^2 - 2x) \operatorname{Log} \tfrac{1}{3} = \operatorname{Log} 5; \quad (x^2 - 2x)(-\operatorname{Log} 3) = \operatorname{Log} 5;$$

$$x^2 - 2x + \frac{\operatorname{Log} 5}{\operatorname{Log} 3} = 0; \quad x = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\operatorname{Log} 5}{\operatorname{Log} 3}}.$$

Такъ какъ $1 < \frac{\operatorname{Log} 5}{\operatorname{Log} 3}$, то уравненіе невозможно при вещественныхъ значеніяхъ x.

Примѣръ 3. Рѣшить уравненіе: $0{,}001^{2^x} = 0{,}3$.

Логариѳмируя въ первый разъ, получимъ:

$$2^x = \frac{\operatorname{Log} 0{,}3}{\operatorname{Log} 0{,}001} = \frac{\overline{1},47712}{-3} = \frac{-0{,}52288}{-3} = 0{,}17429.$$

Логариѳмируя еще разъ, найдемъ:

$$x = \frac{\operatorname{Log} 0{,}17429}{\operatorname{Log} 2} = \frac{\overline{1},24128}{0{,}30103} = \frac{-0{,}75872}{0{,}30103} = -2{,}52\ldots$$

Примѣръ 4. Рѣшить уравненіе: $a^{2x} - a^x = 1$.

Положимъ $a^x = y$, получимъ квадратное уравненіе:

$$y^2 - y - 1 = 0, \text{ откуда: } y_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ y_{11} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Слѣд., $$a^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ и } a^x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Такъ какъ $1 - \sqrt{5} < 0$, то послѣднее уравненіе невозможно (отрицательныя числа не имѣютъ логариѳмовъ), а первое даетъ:

$$x = \frac{\text{Log}\,(1+\sqrt{5}) - \text{Log}\,2}{\text{Log}\,a}$$

Примѣръ 5. Рѣшить уравненіе:

$$\text{Log}\,(a+x) + \text{Log}\,(b+x) = \text{Log}\,(c+x).$$

Уравненіе можно написать такъ:

$$\text{Log}\,[(a+x)(b+x)] = \text{Log}\,(c+x).$$

Изъ равенства логариѳмовъ заключаемъ о равенствѣ чиселъ

$$(a+x)(b+x) = c+x.$$

Это есть квадратное уравненіе, рѣшеніе котораго не представляетъ затрудненій.

Примѣръ 6. Рѣшить систему:

$$xy = a^2,\ \text{Log}^2 x + \text{Log}^2 y = \tfrac{5}{2}\,\text{Log}^2 a^2.$$

Первое уравненіе можно замѣнить такимъ:

$$\text{Log}\,x + \text{Log}\,y = \text{Log}\,a^2.$$

Возвысивъ это уравненіе въ квадратъ и вычтя изъ него второе данное, получимъ:

$$2\,\text{Log}\,x\,\text{Log}\,y = \text{Log}^2 a^2 - \tfrac{5}{2}\,\text{Log}^2 a^2, \text{ откуда: } \text{Log}\,x\,\text{Log}\,y = -\tfrac{3}{4}\,\text{Log}^2 a^2,$$

Зная сумму и произведеніе логариѳмовъ, легко найдемъ и самые логариѳмы:

$$\text{Log } x = \tfrac{3}{2}\text{Log } a^2 = \text{Log}\left(a^2\right)^{\frac{3}{2}} = \text{Log } a^3;\ x = a^3.$$

$$\text{Log } y = -\frac{1}{2}\text{Log } a^2 = \text{Log}\left[(a^2)^{-\frac{1}{2}}\right] = \text{Log } a^{-1};\ y = a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

Такъ какъ данныя уравненія симметричны относительно x и y, то значеніе для x можетъ быть принято за значеніе для y, и наоборотъ; такъ что можно также положить $y = a^3$, $x = a^{-1}$.

Примѣръ 7. Вычислить выраженіе $10^{1-\text{Log } 1,(3)}$, въ которомъ знакъ Log означаетъ десятичный логариѳмъ.

Обозначивъ искомое число черезъ x, будемъ имѣть:

$$x = 10^{1-\text{Log } 1,(3)};\ \text{Log } x = (1 - \text{Log}\tfrac{4}{3})\,\text{Log } 10 = 1 - \text{Log}\tfrac{4}{3} =$$
$$= \text{Log } 10 - \text{Log}\tfrac{4}{3} = \text{Log}\tfrac{30}{4};\ x = \tfrac{30}{4} = \tfrac{15}{2} = 7{,}5.$$

ГЛАВА V.

Сложные проценты, срочныя уплаты и срочные взносы.

313. Основная задача на сложные проценты. Въ какую сумму обратится капиталъ a рублей, отданный въ ростъ по p сложныхъ процентовъ, по прошествіи t лѣтъ (t — цѣлое число)?

Говорятъ, что капиталъ отданъ по сложнымъ процентамъ, если принимаются во вниманіе такъ называемые «проценты на проценты», т.-е. если причитающіяся на капиталъ процентныя деньги присоединяются въ концѣ каждаго года къ капиталу для наращенія ихъ процентами въ слѣдующіе годы.

Каждый рубль капитала, отданнаго по $p\%$, въ теченіе одного года принесетъ прибыли $p/100$ рубля, и слѣд., каждый рубль капитала черезъ 1 годъ обратится въ $1 + p/100$ рубля

(напр., если капиталъ отданъ по 5%, то каждый рубль его черезъ годъ обратится въ 1 + 5/100, т.-е. въ 1,05 рубля). Обозначивъ для краткости дробь $p/100$ одною буквою, напр., r, можемъ сказать, что каждый рубль капитала черезъ годъ обратится въ $1+r$ рубля; слѣд., a рублей обратятся черезъ 1 годъ въ $a(1+r)$ руб. Еще черезъ годъ, т.-е. черезъ 2 года отъ начала роста, каждый рубль изъ этихъ $a(1+r)$ руб. обратится снова въ $1+r$ руб.; значить, весь капиталъ обратится въ $a(1+r)^2$ руб. Такимъ же образомъ найдемъ, что черезъ три года капиталъ будетъ $a(1+r)^3$, черезъ 4 года — $a(1+r)^4$... вообще черезъ t лѣтъ, если t есть цѣлое число, онъ обратится въ $a(1+r)^t$ руб. Такимъ образомъ, обозначивъ черезъ A окончательный капиталъ, будемъ имѣть слѣдующую **формулу сложныхъ процентовъ**:

$$A = a(1+r)^t, \text{ гдѣ } r = \frac{p}{100} \qquad [1]$$

Примѣръ. Пусть $a = 2300$ руб., $p = 4$, $t = 20$ лѣтъ; тогда формула даетъ:

$$r = \frac{4}{100} = 0{,}04; \quad A = 2300\ (1{,}04)^{20}.$$

Чтобы вычислить A, примѣняемъ логариѳмы:

$$\text{Log } A = \text{Log } 2300 + 20 \text{ Log } 1{,}04 = 3{,}36173 + 20.\ 0{,}01703 =$$
$$= 3{,}36173 + 0{,}34060 = 3{,}70233.$$
$$A = 5039 \text{ руб.}$$

Замѣчанія. 1°. Въ этомъ примѣрѣ намъ пришлось Log 1,04 умножить на 20. Такъ какъ число 0,01703 есть приближенное значеніе Log 1,04 съ точностью до $\frac{1}{2}$ стотысячной доли, то произведеніе этого числа на 20 будетъ точно только до $\frac{1}{2}$. 20, т.-е. до 10 стотысячныхъ = 1 десятитысячной. Поэтому въ суммѣ 3,70233 мы не можемъ ручаться не только за цифру стотысячныхъ, но и за цыфру десятитысячныхъ. Чтобы въ подобныхъ случаяхъ можно было получить бо́льшую точность, лучше для числа $1+r$ брать логариѳмы не 5-значные, а съ бо́льшимъ числомъ цыфръ, напр., 7-значные. Для этой цѣли

мы приводимъ здѣсь небольшую табличку, въ которой выписаны 7-значные логариѳмы для наиболѣе употребительныхъ значеній p:

p	$1+r$	Log $(1+r)$
3	1,03	0,0128 372
$3\frac{1}{4}$	1,0325	0,0138 901
$3\frac{1}{2}$	1,035	0,0149 403
$3\frac{3}{4}$	1,0375	0,0159 881
4	1,04	0,0170 333
$4\frac{1}{4}$	1,0425	0,0180 761
$4\frac{1}{2}$	1,045	0,0191 163
$4\frac{3}{4}$	1,0475	0,0201 540
5	1,05	0,0211 893

2°. Существуютъ особыя таблицы, въ которыхъ выписаны значенія множителя $(1+r)^t$ для разныхъ r и t. Пользуясь такими таблицами, можно, конечно, обойтись безъ логариѳмовъ.

319. Случай, когда время выражается дробнымъ числомъ лѣтъ. Если время, на которое отданъ капиталъ, состоитъ изъ t полныхъ лѣтъ и еще k дней, то можно сдѣлать два предположенія: 1) капиталъ a нарастаетъ сложными процентами за все время, или 2) сложные проценты считаются только за цѣлое число лѣтъ, а за k дней счетъ прибыли идетъ на простые проценты. Первое имѣетъ мѣсто въ тѣхъ случаяхъ, когда нарастаніе, не завися отъ условій, принятыхъ человѣкомъ, идетъ непрерывно по одному и тому же закону (напр., при увеличеніи съ теченіемъ времени численности населенія въ какой-нибудь странѣ). Второе имѣетъ мѣсто въ банковыхъ операціяхъ. Легко убѣдиться, что въ первомъ случаѣ законъ нарастанія выражается тою же формулою [1], которую мы вывели для t цѣлаго. Предположимъ, въ самомъ дѣлѣ, что $t = p/q$ лѣтъ, и допустимъ, что 1 рубль черезъ $1/q$ часть года обращается въ $1 + x$ руб. Тогда черезъ q/q частей, т.-е. черезъ 1 годъ, онъ обратится въ $(1+x)^q$, а черезъ p/q года — въ $(1+x)^p$. Но, по смыслу задачи, имѣемъ:

$$(1+x)^q = 1+r,$$

откуда:

$$1+x = (1+r)^{\frac{1}{q}} \text{ и } (1+x)^p = (1+r)^{\frac{p}{q}},$$

т.-е.

$$A = a(1+r)^t.$$

Для случая, когда нарастаніе за часть года разсчитывается по простымъ процентамъ, можно составить другую формулу такимъ образомъ: черезъ t полныхъ лѣтъ капиталъ, нарастая сложными процентами, обратится въ $a(1+r)^t$ руб.; въ k дней каждый рубль принесетъ, считая простые проценты, $\frac{rk}{360}$ руб. процентныхъ денегъ (годъ при коммерческихъ расчетахъ считается въ 360 дней); каждый рубль изъ $a(1+r)$ рублей обратится черезъ k дней въ $1+\frac{rk}{360}$ руб. Поэтому окончательный капиталъ будетъ:

$$A = a(1+r)^t\left(1+\frac{rk}{360}\right). \qquad (2)$$

Если, напр., $a = 2300$, $p = 5$, $t = 10$ и $k = 36$, то найдемъ:

$$A = 2300\,(1{,}05)^{10}\,(1+0{,}005),$$

$$\text{Log}\,A = \text{Log}\,2300 + 10\,\text{Log}\,1{,}05 + \text{Log}\,1{,}005 = 3{,}57580;$$

$$A = 3765{,}35.$$

320. По даннымъ тремъ изъ чиселъ A, a, r и t опредѣлить четвертое. Формула (1) (§ 318) примѣнима и къ рѣшенію такихъ задачъ, въ которыхъ неизвѣстно или a, или r, или t при прочихъ данныхъ числахъ. Такъ, изъ нея находимъ:

для опредѣленія начальнаго капитала: $a = \frac{A}{(1+r)^t}$

и, слѣд., $\qquad \text{Log}\,a = \text{Log}\,A - t\,\text{Log}\,(1+r);$

для опредѣленія процента: $1 + r = \sqrt[t]{\frac{A}{a}}$,

и, слѣд., $\qquad \text{Log}(1+r) = \frac{1}{t}(\text{Log}\,A - \text{Log}\,a).$

Вычисливъ по таблицамъ $1+r$, найдемъ потомъ r, т.-е. $\frac{p}{100}$, а затѣмъ и p.

Для опредѣленія времени будемъ имѣть:

$$\text{Log}\,A = \text{Log}\,a + t\,\text{Log}\,(1+r),$$

откуда: $\qquad t = \frac{\text{Log}\,A - \text{Log}\,a}{\text{Log}\,(1+r)}.$

При рѣшеніи задачъ по формулѣ (2) (§ 319) могутъ представиться нѣкоторыя затрудненія. Такъ, для опредѣленія процента эта формула даетъ уравненіе степени $(t+1)$-й относительно r, которое вообще не разрѣ-

шается элементарно. Въ этомъ случаѣ можно удовлетвориться приближеннымъ рѣшеніемъ, которое находятъ слѣдующимъ образомъ. Назначивъ для r произвольное число, вычисляютъ по формулѣ [2] капиталъ A; если найденное значеніе окажется менѣе даннаго, то, замѣтивъ, что съ увеличеніемъ r увеличивается и A, даютъ для r другое произвольное значеніе, большее прежняго, и снова вычисляютъ A; если это значеніе окажется все-таки меньше даннаго, то еще увеличиваютъ r. Послѣ нѣсколькихъ испытаній находятъ для r такое число, при которомъ вычисляемое значеніе A будетъ весьма мало отличаться отъ даннаго.

Затрудненіе представляется также и тогда, когда по формулѣ [2] опредѣляется время, потому что въ этомъ случаѣ получается одно уравненіе съ двумя неизвѣстными t и k. Затрудненіе это обходятъ, пользуясь сначала формулой [1] для вычисленія цѣлаго числа лѣтъ, а потомъ — формулой [2] для вычисленія k.

Задача. Въ какое время надо отдать капиталъ въ 5000 рублей по 6 сложныхъ процентовъ, чтобы вмѣстѣ съ нимъ получить 6000 рублей?

Мы не знаемъ, будетъ ли искомое число цѣлое или дробное. Предположимъ, что оно будетъ цѣлое. Въ такомъ случаѣ можемъ воспользоваться формулой [1] (§ 318), которая даетъ:

$$6000 = 5000 . 1{,}06^t \text{ или } 6 = 5 . 1{,}06^t,$$

откуда, логарифмируя, найдемъ:

$$t = \frac{\text{Log } 6 - \text{Log } 5}{\text{Log } 1{,}06} = \frac{0{,}77815 - 0{,}69897}{0{,}02531} = \frac{0{,}07918}{0{,}02532} = 3{,}1\ldots$$

Значитъ, нельзя предположить, что t есть число цѣлое, и потому, если только въ задачѣ подразумѣвается условіе, что за часть года наращеніе идетъ по закону простыхъ процентовъ, мы не имѣемъ права пользоваться формулой [1]. Но не трудно понять, что найденный изъ этой формулы результатъ невѣренъ только относительно части года, а не цѣлаго числа лѣтъ. Такимъ образомъ, мы можемъ въ формулѣ [2] (§ 319) на мѣсто t подставить найденное число 3, послѣ чего получимъ:

$$6000 = 5000 . 1{,}06^3 \left(1 + \frac{0{,}06k}{360}\right) \text{ или } 6 = 5 . 1{,}06^3 \left(1 + \frac{0{,}01k}{60}\right);$$

$$\text{Log}\left(1 + \frac{0{,}01k}{60}\right) = \text{Log } 6 - \text{Log } 5 - 3\,\text{Log } 1{,}06 = 0{,}00325.$$

По таблицамъ находимъ: $1 + \frac{0{,}01k}{60} = 1{,}0075$; откуда $k = 45$.

Слѣд., искомое время есть 3 года 45 дней.

321. Основная задача на срочныя уплаты. Нѣкто занялъ a рублей по p%, съ условіемъ погасить долгъ, вмѣстѣ съ причитающимися на него процентами, въ t лѣтъ, внося

въ концѣ каждаго года одну и ту же сумму. Какова должна быть эта сумма?

Сумма x, вносимая ежегодно при такихъ условіяхъ, называется срочною уплатою. Обозначимъ опять буквою r ежегодныя процентныя деньги съ 1 рубля, т.-е. число $p/_{100}$. Тогда къ концу 1-го года долгъ a возрастетъ до $a(1+r)$, а за уплатою x рублей онъ сдѣлается $a(1+r)-x$. Къ концу 2-го года каждый рубль этой суммы снова обратится въ $1+r$ рублей, и потому долгъ будетъ $[a(1+r)-x](1+r)=a(1+r)^2-x(1+r)$, а за уплатою x рублей окажется: $a(1+r)^2-x(1+r)-x$. Такимъ же образомъ убѣдимся, что къ концу 3-го года долгъ будетъ $a(1+r)^3-x(1+r)^2-x(1+r)-x$ и вообще къ концу t-го года онъ окажется:

$$a(1+r)^t-x(1+r)^{t-1}-x(1+r)^{t-2}\ldots-x(1+r)-x$$

или $a(1+r)^t-x[1+(1+r)+(1+r)^2+\ldots+(1+r)^{t-2}+(1+r)^{t-1}]$.

Многочленъ, стоящій внутри скобокъ [ ], представляетъ сумму членовъ геометрической прогрессіи, у которой первый членъ есть 1, послѣдній $(1+r)^{t-1}$, а знаменатель $(1+r)$. По формулѣ для суммы членовъ геометрической прогрессіи (§ 285) находимъ:

$$s=\frac{lq-a}{q-1}=\frac{(1+r)^{t-1}(1+r)-1}{(1+r)-1}=\frac{(1+r)^t-1}{r},$$

и величина долга послѣ t-ой уплаты будетъ:

$$a(1+r)^t-x\frac{(1+r)^t-1}{r}.$$

По условію задачи, долгъ въ концѣ t-го года долженъ равняться 0; поэтому

$$a(1+r)^t-x\frac{(1+r)^t-1}{r}=0,\text{ откуда } x=\frac{a(1+r)^t r}{(1+r)^t-1}. \quad [1]$$

При вычисленіи этой **формулы срочныхъ уплатъ** помощью логариѳмовъ мы должны сначала найти вспомогательное число $N=(1+r)^t$ по логариѳму: $\mathrm{Log}\,N=t\,\mathrm{Log}(1+r)$; найдя N, вычтемъ изъ него 1; тогда получимъ знаменателя формулы для x, послѣ чего вторичнымъ логариѳмированіемъ найдемъ:

$$\mathrm{Log}\,x=\mathrm{Log}\,a+\mathrm{Log}\,N+\mathrm{Log}\,r-\mathrm{Log}\,(N-1).$$

322. По даннымъ тремъ изъ чиселъ x, a, r и t опредѣлить четвертое. Та же формула можетъ служить для рѣшенія и такихъ задачъ, въ которыхъ извѣстна срочная уплата, а отыскивается или занятая сумма, или время, или величина процента. Изъ нея находимъ:

для опредѣленія долга: $a = \frac{x[(1+r)^t - 1]}{r(1+r)^t}$;

для опредѣленія времени: $(1+r)^t = \frac{x}{x - ar}$;

откуда: $$t = \frac{\text{Log}\, x - \text{Log}(x - ar)}{\text{Log}(1+r)}$$

Въ послѣднемъ случаѣ задача окажется невозможною, если $x < ar$, такъ какъ отрицательныя числа не имѣютъ логариѳмовъ, а $\text{Log}\, 0 = -\infty$ (слѣд., $t = +\infty$); невозможность задачи видна и а priori, такъ какъ произведеніе ar означаетъ ежегодныя процентныя деньги, а если срочная уплата меньше процентныхъ денегъ или равна имъ, то, конечно, долгъ не можетъ быть погашенъ ни въ какое число лѣтъ. Задача также невозможна, если для t получается дробное число; заключающееся въ этомъ дробномъ числѣ цѣлое число n означаетъ, что n срочными уплатами долгъ не покрывается вполнѣ, а $n+1$ уплатами онъ покрывается съ избыткомъ.

Когда неизвѣстна величина процента, мы получаемъ уравненіе степени $(t+1)$-й, которое элементарно можетъ быть рѣшено только приблизительно, посредствомъ подстановки въ формулу [1] на мѣсто r произвольныхъ чиселъ до тѣхъ поръ, пока не получится для x числа, близкаго къ заданному.

323. Основная задача на срочные взносы. Нѣкто вноситъ въ банкъ въ началѣ каждаго года одну и ту же сумму a руб. Опредѣлить, какой капиталъ образуется изъ этихъ взносовъ по прошествіи t лѣтъ, если банкъ платитъ по p сложныхъ процентовъ.

Обозначивъ черезъ r ежегодныя процентныя деньги съ 1 рубля, т.-е. $p/_{100}$, разсуждаемъ такъ: къ концу 1-го года капиталъ будетъ $a(1+r)$; въ началѣ 2-го года къ этой суммѣ прибавится

a руб.; значитъ, въ это время капиталъ окажется $a(1+r)+a$. Къ концу 2-го года онъ будетъ $a(1+r)^2+a(1+r)$; въ началѣ 3-го года снова вносится a руб.; значитъ, въ это время капиталъ будетъ $a(1+r)^2+a(1+r)+a$; къ концу 3-го года онъ окажется $a(1+r)^3+a(1+r)^2+a(1+r)$. Продолжая эти разсужденія далѣе, найдемъ, что къ концу t-го года искомый капиталъ A будетъ:

$$A=a(1+r)^t+a(1+r)^{t-1}+a(1+r)^{t-2}+\ldots+a(1+r)=$$
$$=a(1+r)[(1+r)^{t-1}+(1+r)^{t-2}+\ldots+1]=$$
$$=a(1+r)\frac{(1+r)^{t-1}(1+r)-1}{(1+r)-1}=a(1+r)\frac{(1+r)^t-1}{r}.$$

Такова **формула срочныхъ взносовъ**, дѣлаемыхъ въ началѣ каждаго года.

Ту же формулу можно получить и такимъ разсужденіемъ. Первый взносъ въ a рублей, находясь въ банкѣ t лѣтъ, обратится, согласно формулѣ сложныхъ процентовъ (§ 318), въ $a(1+r)^t$ руб. Второй взносъ, находясь въ банкѣ единимъ годомъ меньше, т.-е. $t-1$ лѣтъ, обратится въ $a(1+r)^{t-1}$ руб. Подобно этому третій взносъ дастъ $a(1+r)^{t-2}$ и т. д. и, наконецъ, послѣдній взносъ, находясь въ банкѣ только 1 годъ, обратится въ $a(1+r)$ руб. Значитъ, окончательный капиталъ A руб. будетъ:

$$A=a(1+r)^t+a(1+r)^{t-1}+a(1+r)^{t-2}+\ldots+a(1+r),$$

что, послѣ упрощенія, даетъ найденную выше формулу.

При вычисленіи помощью логариѳмовъ этой формулы надо поступить такъ же, какъ и при вычисленіи формулы срочныхъ уплатъ, т.-е. сначала найти число $N=(1+r)^t$ по его логариѳму: $\text{Log}\,N=t\,\text{Log}(1+r)$, затѣмъ число $N-1$ и уже тогда логариѳмировать формулу:

$$\text{Log}\,A=\text{Log}\,a+\text{Log}\,(1+r)+\text{Log}\,(N-1)-\text{Log}\,r$$

Замѣчанія. 1°. Если бы срочный взносъ въ a руб. производился не въ началѣ, а въ концѣ каждаго года (какъ, напр., вносится срочная плата x для погашенія долга, § 321), то,

разсуждая подобно предыдущему, найдемъ, что къ концу t-го года искомый капиталъ A' руб. будетъ (считая въ томъ числѣ и послѣдній взносъ a руб., не приносящій процентовъ):

$$A' = a(1+r)^{t-1} + a(1+r)^{t-2} + \ldots + a(1+r) + a,$$

что равно $$A' = a \cdot \frac{[(1+r)^t - 1]}{r},$$

т.-е. A' оказывается въ $(1+r)$ разъ менѣе A, что и надо было ожидать, такъ какъ каждый рубль капитала A' лежитъ въ банкѣ годомъ меньше, чѣмъ соотвѣтствующій рубль капитала A.

2°. Существуютъ особыя таблицы, въ которыхъ выписаны значенія множителей:

$\frac{(1+r)^t r}{(1+r)^t r - 1}$ (для срочн. уплатъ) и $\frac{(1+r)^t - 1}{r}$ (для сроч. взносовъ) для разныхъ r и t.

ОТДѢЛЪ X.

Соединенія, биномъ Ньютона и непрерывныя дроби.

ГЛАВА I.

Соединенія.

324. Опредѣленіе. Различныя группы, составленныя изъ данныхъ предметовъ и отличающіяся одна отъ другой или порядкомъ этихъ предметовъ, или самими предметами, называются **соединеніями.** Предметы, входящіе въ соединенія, наз. **элементами** и обозначаются буквами *a*, *b*, *c*, *d*...

Соединенія могутъ быть трехъ родовъ: размѣщенія (arrangements), перестановки (permutations) и сочетанія (combinaisons). Разсмотримъ ихъ отдѣльно.

325. Размѣщенія. Размѣщеніями изъ данныхъ m элементовъ по n ($n \leqslant m$) называются такія соединенія, изъ которыхъ каждое содержитъ n элементовъ, взятыхъ изъ данныхъ m элементовъ, и которыя отличаются одно отъ другого или порядкомъ элементовъ, или самыми элементами.

Напр., слѣдующія соединенія представляютъ собою размѣщенія изъ 4 элементовъ *a*, *b*, *c*, *d* по 2:

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd,$$
$$ba,\ ca,\ da,\ cb,\ db,\ dc.$$

Изъ нихъ нѣкоторыя, напр., *ab* и *ba*, отличаются только порядкомъ элементовъ, а другія, какъ *ab* и *ac*, отличаются элементами.

Размѣщенія изъ данныхъ m элементовъ могутъ быть по 1, по 2, по 3..., и, наконецъ, по m.

Иногда бываетъ нужно знать число всевозможныхъ размѣщеній изъ m элементовъ по n, не составляя самихъ размѣщеній. Условимся это число обозначать такъ: A_m^n (здѣсь A есть начальная буква слова arrangement). Чтобы найти это число, разсмотримъ пріемъ, посредствомъ котораго можно составлять всевозможныя размѣщенія.

Пусть намъ дано m элементовъ: $a, b, c, \ldots k, l$. Сначала составимъ изъ нихъ всѣ размѣщенія по одному. Ихъ будетъ, очевидно, m. Значитъ: $A_m^1 = m$. Теперь составимъ всѣ размѣщенія по 2. Для этого къ каждому изъ размѣщеній по одному будемъ приставлять послѣдовательно всѣ оставшіеся элементы по одному:

$$m\left\{\begin{array}{ll} ab,\ ac,\ ad, \ldots ak,\ al & (m-1 \text{ разм.}) \\ ba,\ bc,\ bd, \ldots bk,\ bl & (m-1 \text{ разм.}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ la,\ lb,\ lc \ldots\ldots\ldots lk & (m-1 \text{ разм.}) \end{array}\right.$$

Такъ, къ элементу a приставимъ послѣдовательно оставшіеся элементы: $b, c, d, \ldots k, l$, къ элементу b приставимъ послѣдовательно оставшіеся элементы: $a, c, d, \ldots k, l$, и т. д. Такъ какъ всѣхъ элементовъ m, то каждому размѣщенію по 1 элементу соотвѣтствуетъ $m-1$ оставшихся элементовъ, и потому изъ каждаго размѣщенія по одному элементу мы получимъ $m-1$ размѣщеній по 2 элемента, а всего ихъ будетъ $m(m-1)$. Очевидно, что другихъ размѣщеній по 2 элемента быть не можетъ. Такимъ образомъ:

$$A_m^2 = m(m-1).$$

Чтобы составить теперь размѣщенія по 3, беремъ каждое изъ размѣщеній по 2 и приставляемъ къ нему послѣдовательно по одному всѣ $m-2$ оставшихся элемента. Тогда получимъ слѣдующія соединенія:

$$m(m-1)\left\{\begin{array}{ll} abc,\ abd, \ldots abk,\ abl & (m-2 \text{ разм.}) \\ acb,\ acd, \ldots ack,\ acl & (m-2 \text{ разм.}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ lka,\ lkb \ldots\ldots\ldots\ldots & (m-2 \text{ разм.}) \end{array}\right.$$

Такъ какъ число размѣщеній по 2 равно $m(m-1)$ и изъ каждаго размѣщенія по 2 получается $m-2$ размѣщенія по 3, то всѣхъ такихъ размѣщеній окажется $m(m-1)(m-2)$.

Законъ этотъ обладаетъ общностью, такъ какъ процессъ перехода отъ размѣщеній изъ m элементовъ по p къ размѣщеніямъ изъ m элементовъ по $p+1$ — одинъ и тотъ же для всякой величины p.

Замѣтивъ это, можемъ писать вообще:

$$A^n_m = m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)].$$

Такова **формула размѣщеній**; ее можно выразить такъ: **число всевозможныхъ размѣщеній изъ m элементовъ по n равно произведенію n послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ, изъ которыхъ большее есть m.** Такимъ образомъ:

$$A^2_4 = 4.3 = 12,\ A^3_4 = 4.3.2 = 24,\ A^4_8 = 8.7.6.5 = 1680, \text{ и т. п.}$$

Задачи. 1°. Въ классѣ 10 учебныхъ предметовъ и 5 разныхъ уроковъ въ день. Сколькими способами могутъ быть распредѣлены уроки въ день?

Всевозможныя распредѣленія уроковъ въ день представляютъ собою, очевидно, всевозможныя размѣщенія изъ 10 элементовъ по 5; поэтому всѣхъ способовъ распредѣленія будетъ:

$$A^5_{10} = 10.9.8.7.6 = 30240.$$

2°. Сколько можно образовать цѣлыхъ чиселъ, изъ которыхъ каждое выражалось бы тремя различными значащими цифрами?

Искомое число представляетъ собою число размѣщеній изъ 9 значащихъ цифръ по 3; слѣд., оно равно $9.8.7 = 504$.

3°. Сколько можно образовать цѣлыхъ чиселъ, изъ которыхъ каждое выражалось бы тремя различными цифрами?

Изъ 10 цифръ можно составить размѣщеній по три: $10.9.8 = 720$; но изъ этого числа надо исключить число тѣхъ размѣщеній по три, которыя начинаются съ цифры 0; такихъ размѣщеній будетъ столько, сколько можно составить размѣщеній по 2 изъ 9 значащихъ цифръ, т.-е. $9.8 = 72$; слѣдовательно, искомое число $= 720 - 72 = 648$.

326. Перестановки. Перестановками изъ данныхъ m элементовъ наз. такія соединенія, изъ которыхъ каждое содержитъ всѣ m элементовъ и которыя отличаются одно отъ другого только порядкомъ ихъ. Напр., перестановки изъ трехъ элементовъ a, b и c будутъ такія соединенія: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Изъ этого опредѣленія видно, что перестановки изъ m элементовъ суть размѣщенія изъ m элементовъ по m.

Число всевозможныхъ перестановокъ изъ m элементовъ обозначается P_m (здѣсь P есть начальная буква слова permutation).

Такъ какъ $P_m = A_m^m$, то формула перестановокъ есть слѣдующая:

$$P_m = m(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1 = 1.2.3\ldots(m-1)m,$$

т. е. число всевозможныхъ перестановокъ изъ m элементовъ равно произведенію натуральныхъ чиселъ отъ 1 до m [1]).

Задачи. 1°. Сколько девятизначныхъ чиселъ можно написать девятью разными значащими цифрами?

Искомое число есть $P_9 = 1.2.3.4.5.6.7.8.9 = 362880$.

2°. Сколькими способами можно размѣстить 12 лицъ за столомъ, на которомъ поставлено 12 приборовъ?

Число способовъ $= 1.2.3\ldots 12 = 479001600$.

327. Сочетанія. Сочетаніями изъ данныхъ m элементовъ по n $(n < m)$ наз. такія соединенія, изъ которыхъ каждое содержитъ n элементовъ, взятыхъ изъ данныхъ m элементовъ, и которыя отличаются одно отъ другого по крайней мѣрѣ однимъ элементомъ.

Напр., изъ 4 элементовъ a, b, c и d сочетанія по 3 будутъ:

$$abc,\ abd,\ acd,\ bcd.$$

1) Произведеніе натуральныхъ чиселъ отъ 1 до m включительно (оно наз. „факторіалъ") обозначается иногда сокращенно такъ: $m!$ Численная величина этого произведенія растетъ чрезвычайно быстро съ возрастаніемъ m; такъ, при $m = 10$ это произведеніе даетъ 3628800, при $m = 100$ оно выражается числомъ, требующимъ 158 цифръ для своего изображенія.

Сочетанія изъ m элементовъ могутъ быть: по 1, по 2, по 3... и, наконецъ, по m (въ послѣднемъ случаѣ получается только одно сочетаніе).

Изъ опредѣленія видно, что сочетанія представляютъ собою тѣ размѣщенія, которыя отличаются одно отъ другого элементами. Это обстоятельство позволяетъ найти число всѣхъ сочетаній изъ m элем. по n, обозначаемое C_m^n (здѣсь C есть начальная буква слова combinaison). Въ самомъ дѣлѣ, если, найдя всѣ сочетанія изъ m элем. по n, мы сдѣлаемъ въ каждомъ изъ нихъ всевозможныя перестановки, то получимъ всѣ размѣщенія изъ m элем. по n. Напр., сдѣлавъ въ каждомъ изъ написанныхъ выше сочетаній всевозможныя перестановки, получимъ всевозможныя размѣщенія изъ 4 элементовъ по 3:

abc	*abd*	*acd*	*bcd*
acb	*adb*	*adc*	*bdc*
bac	*bad*	*cad*	*cbd*
bca	*bda*	*cda*	*cdb*
cab	*dab*	*dac*	*dbc*
cba	*dba*	*dca*	*dcb*.

Дѣйствительно, во-первыхъ, эти соединенія суть различныя размѣщенія, такъ какъ они отличаются одно отъ другого или порядкомъ элементовъ, или самими элементами; во-вторыхъ, въ этихъ соединеніяхъ должны встрѣтиться всѣ размѣщенія изъ 4 элементовъ по 3, такъ какъ если бы могло быть размѣщеніе, не встрѣчающееся въ полученныхъ соединеніяхъ, то оно отличалось бы отъ нихъ или порядкомъ, или элементами; если порядкомъ, то это значило бы, что мы не сдѣлали всевозможныхъ перестановокъ; если элементами, то это значило бы, что мы не сдѣлали всевозможныхъ сочетаній.

Изъ этого слѣдуетъ, что число всѣхъ размѣщеній изъ m элем. по n равно числу всѣхъ сочетаній изъ m элем. по n, умноженному на число всѣхъ перестановокъ, какія можно сдѣлать изъ n элементовъ; другими словами:

$$A_m^n = C_m^n \cdot P_n.$$

Отсюда выводимъ слѣдующую **формулу сочетаній:**

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)\dots[m-(n-1)]}{1.2.3\dots n}. \qquad (1)$$

Такимъ образомъ, $C_4^2 = \frac{4.3}{1.2} = 6$, $C_4^3 = \frac{4.3.2}{1.2.3} = 4$, и т. д.

Задачи. 1°. Изъ 10 кандидатовъ на одну и ту же должность должны быть выбраны трое. Сколько можетъ быть разныхъ случаевъ?

Искомое число, очевидно, представляетъ число всевозможныхъ сочетаній изъ 10 элементовъ по 3, т.-е.

$$C_{10}^3 = \frac{10.9.8}{1.2.3} = 120.$$

2°. Сколькими способами можно выбрать 13 картъ изъ колоды въ 52 карты?

Искомое число представляетъ собой число сочетаній изъ 52 по 13, т.-е.

$$C_{52}^{13} = \frac{52.51.50\ldots40}{1.2.3\ldots13} = 635\ 013\ 559\ 600.$$

328. Другой видъ формулы сочетаній. Формулѣ сочетаній можно дать иной видъ, если умножимъ числителя и знаменателя ея на произведеніе: $1.2.3\ldots(m-n)$; тогда въ числителѣ получимъ произведеніе натуральныхъ чиселъ отъ 1 до m, а въ знаменателѣ — произведеніе натуральныхъ чиселъ отъ 1 до n, умноженное на произведеніе натуральныхъ чиселъ отъ 1 до $m-n$:

$$C_m^n = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots(m-n)} = \frac{P_m}{P_n P_{m-n}}. \qquad (2)$$

329. Свойство сочетаній. Замѣняя въ формулѣ (2) n на $m-n$, получаемъ:

$$C_m^{m-n} = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{1.2.3\ldots(m-n).1.2.3\ldots n} = \frac{P_m}{P_{m-n} P_n}.$$

Сравнивая эту формулу со (2), находимъ: $C_m^n = C_m^{m-n}$, т.-е. **число сочетаній изъ m элементовъ по n равно числу сочетаній изъ m элементовъ по $m-n$.**

Къ этому выводу приводитъ и такое простое разсужденіе: если изъ m элементовъ отберемъ какіе-нибудь n, чтобы составить изъ нихъ одно сочетаніе, то совокупность оставшихся

элементовъ составитъ одно сочетаніе изъ $m-n$ элементовъ. Такимъ образомъ, каждому сочетанію, состоящему изъ n элементовъ, соотвѣтствуетъ одно сочетаніе изъ $m-n$ элементовъ, и наоборотъ; отсюда слѣдуетъ, что $C_m^n = C_m^{m-n}$.

Выведенное соотношеніе позволяетъ упростить нахожденіе числа сочетаній изъ m элементовъ по n, когда n превосходитъ $\frac{1}{2}m$. Напримѣръ:

$$C_{100}^{97} = C_{100}^{3} = \frac{100.99.98}{1.2.3} = 161700.$$

ГЛАВА II.

Биномъ Ньютона.

330. Предварительное замѣчаніе. Въ этой главѣ мы ставимъ цѣлью преобразовать степень бинома $(a+b)^m$, въ которой показатель m есть число цѣлое и положительное, въ многочленъ, расположенный по степенямъ буквъ a и b (частные случаи такого преобразованія мы имѣли ранѣе въ формулахъ: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ и $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$). Для этого предварительно найдемъ произведеніе m биномовъ: $x+a$, $x+b$, $x+c$,..., въ которыхъ первые члены одинаковы (мы ихъ обозначимъ буквою x), а вторые члены разные: a, b, c... и т. д. Найдя такое произведеніе, мы затѣмъ предположимъ, что и вторые члены одинаковы, т.-е. $a = b = c = \ldots$.

331. Произведеніе биномовъ, отличающихся только вторыми членами. Обыкновеннымъ умноженіемъ находимъ:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a+b)x + ab;$$

$$(x+a)(x+b)(x+c) = [x^2 + (a+b)x + ab](x+c) =$$
$$= x^3 + (a+b)x^2 + abx + cx^2 + (ac+bc)x + abc =$$
$$= x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc.$$

Подобно этому найдемъ:

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 + (a+b+c+d)x^3 +$$
$$+ (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 + (abc+abd+acd+bcd)x + abcd.$$

Разсматривая получившіяся произведенія, замѣчаемъ, что всѣ они составлены по одному и тому же закону, а именно:

Произведеніе представляетъ многочленъ, расположенный по убывающимъ степенямъ буквы x.

Показатель перваго члена равенъ числу перемножаемыхъ биномовъ; показатели при x въ слѣдующихъ членахъ постепенно убываютъ на 1; послѣдній членъ не содержитъ x.

Коэффиціентъ 1-го члена есть 1; коэффиціентъ 2-го члена есть сумма всѣхъ вторыхъ членовъ перемножаемыхъ биномовъ, коэффиціентъ 3-го члена есть сумма произведеній вторыхъ членовъ, взятыхъ по два; коэффиціентъ 4-го члена есть сумма произведеній вторыхъ членовъ, взятыхъ по три.

Послѣдній членъ есть произведеніе всѣхъ вторыхъ членовъ.

Докажемъ, что этотъ законъ примѣнимъ къ произведенію какого угодно числа биномовъ. Для этого предварительно убѣдимся, что если онъ вѣренъ для произведенія m биномовъ:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\dots(x+k),$$

то будетъ вѣренъ и для произведенія $m+1$ биномовъ:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\dots(x+k)(x+l).$$

Итакъ, допустимъ, что вѣрно слѣдующее равенство:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\dots(x+k)=x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+\dots+S_m,$$

гдѣ S_1 означаетъ сумму всѣхъ вторыхъ членовъ, S_2 — сумму произведеній изо всѣхъ вторыхъ членовъ, взятыхъ по два, S_3—сумму произведеній изо всѣхъ вторыхъ членовъ, взятыхъ по три, и т. д.; наконецъ, S_m есть произведеніе всѣхъ вторыхъ членовъ.

Умножимъ обѣ части этого равенства на биномъ $x+l$, найдемъ:

$$(x+x)(x+b)\dots(x+k)(x+l)=(x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+\dots+S_m)(x+l)=$$
$$=x^{m+1}+S_1x^m+S_2x^{m-1}+\dots+S_mx+lx^m+lS_1x^{m-1}+\dots+lS_{m-1}x+lS_m=$$
$$=x^{m+1}+(S_1+l)x^m+(S_2+lS_1)x^{m-1}+\dots+(S_m+lS_{m-1})x+lS_m.$$

Разсматривая это новое произведеніе, убѣждаемся, что оно подчиняется такому же закону, какой мы предположили вѣрнымъ для m биномовъ. Дѣйствительно: во 1-хъ, этому закону

слѣдують показатели буквы x; во-2-хъ, коэффиціетъ 2-го члена S_1+l представляетъ сумму всѣхъ вторыхъ членовъ перемножаемыхъ биномовъ, включая сюда и l; коэффиціентъ 3-го члена S_2+lS_1 есть сумма парныхъ произведеній всѣхъ вторыхъ членовъ, включая сюда и l, и т. д.; наконецъ, lS_m есть произведеніе всѣхъ вторыхъ членовъ: a, b, $c \ldots k$, l.

Мы выше видѣли, что разсматриваемый законъ вѣренъ для 4 биномовъ; слѣд., по доказанному теперь, онъ вѣренъ для $4+1$, т.-е. для 5 биномовъ; если же онъ вѣренъ для 5 биномовъ, то онъ вѣренъ и для 6 биномовъ, и т. д.

Изложенное разсужденіе представляетъ такъ называемое «доказательство отъ m къ $m+1$». Оно часто употребляется для показанія общности какого-нибудь правила или свойства [1]).

332. *Формула бинома Ньютона и ея свойства.* Предположимъ, что въ доказанномъ нами равенствѣ:

$$(x+a)(x+b)\ldots(x+k)=x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+S_3x^{m-3}+\cdots+S_m$$

всѣ вторые члены биномовъ одинаковы, т.-е. $a=b=c=\ldots=k$.

Тогда лѣвая часть его будетъ степень бинома $(x+a)^m$. Посмотримъ, во что обратятся коэффиціенты $S_1, S_2, \ldots S_m$.

Коэффиціентъ S_1, равный $a+b+c+\cdots+k$, обратится въ ma. Коэффиціентъ S_2, равный $ab+ac+ad+\ldots$, обратится въ число a^2, повторенное столько разъ, сколько можно составить сочетаній изъ m элементовъ по два, т.-е. онъ обратится въ $\frac{m(m-1)}{1.2}a^2$. Коэффиціентъ S_3, равный $abc+abd+\ldots$, обратится въ число a^3, повторенное столько разъ, сколько можно составить сочетаній изъ m элементовъ по 3, т.-е. въ $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3$, и т. д. Наконецъ, коэффиціентъ S_m, равный $abc\ldots k$, обратится въ a^m.

---

[1]) Это доказательство наз. также „математической индукціей" или „совершенной индукціей". Замѣтимъ, что въ предыдущихъ главахъ этого учебника неоднократно представлялся случай примѣнять доказательство отъ m къ $m+1$ (напр., при выводѣ формулы квадрата многочлена, § 158, формулы для любого члена прогрессіи, §§ 279 и 284, формулы сложныхъ процентовъ, § 318, и др.) Мы этого не дѣлали только ради простоты изложенія.

Такимъ образомъ, мы получимъ:

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1.2.3\ldots n}a^nx^{m-n} + \ldots + a^m.$$

Это равенство извѣстно, какъ **формула бинома Ньютона** [1], при чемъ многочленъ, стоящій въ правой части формулы, наз. **разложеніемъ бинома**. Разсмотримъ особенности этого многочлена.

1) Показатели буквы x постепенно уменьшаются на 1 отъ перваго члена къ послѣднему, при чемъ въ первомъ членѣ показатель x равенъ показателю степени бинома, а въ послѣднемъ онъ есть 0; наоборотъ, показатели a постепенно увеличиваются на 1 отъ перваго члена къ послѣднему, при чемъ въ первомъ членѣ показатель при a есть 0, а въ послѣднемъ онъ равенъ показателю степени бинома. Вслѣдствіе этого сумма показателей при x и a въ каждомъ членѣ равна показателю степени бинома.

2) Число всѣхъ членовъ разложенія есть $m+1$, такъ какъ разложеніе содержитъ всѣ послѣдовательныя степени a отъ 0 до m включительно.

3) Коэффиціентъ 1-го члена равенъ 1; коэффиціентъ 2-го члена есть показатель степени бинома; коэффиціентъ 3-го члена представляетъ число сочетаній изъ m элементовъ по 2; коэффиціентъ 4-го члена — число сочетаній изъ m элем. по 3; вообще, коеффиціентъ $(n+1)$-го члена есть число сочетаній изъ m элементовъ по n. Наконецъ, коэффиціентъ послѣдняго члена равенъ числу сочетаній изъ m элементовъ по m, т.-е. 1.

Замѣтимъ, что всѣ эти коэффиціенты наз. **биноміальными коэффиціентами**.

---

[1]) Исаакъ Ньютонъ, знаменитый англійскій математикъ, жилъ отъ 1642 г. по 1727 г. Формула бинома не только для m цѣлаго положительнаго, но и для отрицательнаго и дробнаго, была имъ указана около 1665 г. Однако строгаго доказательства ея онъ не далъ. Для цѣлыхъ положительныхъ показателей формула была впервые доказана Яковомъ Бернули (1654—1705) съ помощью теоріи соединеній.

4) Обозначая каждый членъ разложенія буквою T съ цифрою внизу, указывающею мѣсто этого члена въ разложеніи, т.-е. первый членъ T_1, второй членъ T_2 и т. д., мы можемъ написать:

$$T_{n+1} = C_m^n a^n x^{m-n} = \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1.2.3\ldots n} a^n x^{m-n}.$$

Эта формула представляетъ собою общій членъ разложенія, потому что изъ нея мы можемъ получить всѣ члены (кромѣ перваго), подставляя на мѣсто n числа: 1, 2, 3...m.

5) Коэффиціентъ 1-го члена отъ начала разложенія равенъ 1, коэффиціентъ 1-го члена отъ конца есть C_m^m, т.-е. тоже 1. Коэффиціентъ 2-го члена отъ начала есть m, т.-е. C_m^1; коэффиціентъ 2-го члена отъ конца есть C_m^{m-1}; но $C_m^1 = C_m^{m-1}$ (§ 329); коэффиціентъ 3-го члена отъ начала есть C_m^2, а 3-го члена отъ конца есть C_m^{m-2}; но $C_m^2 = C_m^{m-2}$, и т. д. [1]). Значитъ, коэффиціенты членовъ, одинаково удаленныхъ отъ концовъ разложенія, равны между собою.

6) Разсматривая биноміальные коэффиціенты:

$$1, m, \frac{m(m-1)}{1.2}, \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}, \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} \ldots$$

замѣчаемъ, что при переходѣ отъ одного коэффиціента къ слѣдующему числители умножаются на числа все меньшія и меньшія (на $m-1$, на $m-2$, на $m-3$, и т. д.), а знаменатели умножаются на числа все большія и большія (на 2, на 3, на 4 и т. д.) Вслѣдствіе этого коэффиціенты сначала возрастаютъ (пока множителя въ числителѣ остаются большими соотвѣтственныхъ множителей въ знаменателѣ), а затѣмъ убываютъ. Такъ какъ коэффиціенты членовъ, равноотстоящихъ отъ концовъ строки, одинаковы, то членъ съ наибольшимъ коэффиціентомъ находится посрединѣ разложенія. При этомъ надо различать два случая: первый, когда показатель бинома—число четное, и второй, когда онъ—число нечетное. Въ первомъ случаѣ число всѣхъ членовъ

---

[1]) Вообще, у $(n+1)$-го члена отъ начала коэффиціентъ есть C_m^n; $(n+1)$-й членъ отъ конца занимаетъ отъ начала ряда мѣсто $(m+1)-(n+1)+1 = m-n+1$; поэтому его коэффиціентъ есть C_m^{m-n}; но $C_m^n = C_m^{m-n}$; слѣд. коэффиціенты у этихъ членовъ одинаковы.

разложенія нечетное; тогда посрединѣ будетъ одинъ членъ съ наибольшимъ коэффиціентомъ. Во второмъ случаѣ число всѣхъ членовъ четное, и такъ какъ коэффиціенты членовъ, одинаково удаленныхъ отъ концовъ разложенія, одинаковы, то посрединѣ должны быть два члена съ одинаковыми наибольшими коэффиціентами.

Примѣры. 1) $(x+a)^4 = x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4$;

2) $(x+a)^5 = x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5$.

7) Изъ сравненія двухъ рядомъ стоящихъ членовъ:

$$T_{n+1} = \frac{m(m-1)\dots[m-(n-1)]}{1.2.3\dots n} a^n x^{m-n},$$

$$T_{n+2} = \frac{m(m-1)\dots[m-(n-1)](m-n)}{1.2.3\dots n(n+1)} a^{n+1} x^{m-n-1},$$

слѣдуетъ: чтобы получить коэффиціентъ слѣдующаго члена, достаточно коэффиціентъ предыдущаго члена умножить на показателя буквы x въ этомъ членѣ и раздѣлить на число членовъ, предшествующихъ опредѣляемому.

Это свойство коэффиціентовъ значительно облегчаетъ разложенія; такъ, пользуясь имъ, можемъ сразу писать:

$$(x+a)^7 = x^7+7ax^6+21a^2x^5+35a^3x^4+\dots$$

Написавъ члены до середины ряда, остальные получимъ, основываясь на свойствѣ 5-мъ:

$$\dots+35a^4x^3+21a^5x^2+7a^6x+a^7.$$

8) Сумма всѣхъ биноміальныхъ коэффиціентовъ равна 2^m. Дѣйствительно, положивъ въ формулѣ бинома $x=a=1$, получимъ:

$$2^m = 1+m+\frac{m(m-1)}{1.2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\dots+1.$$

9) Замѣнивъ въ формулѣ бинома Ньютона a на $-a$, получимъ:

$$(x-a)^m = x^m+m(-a)x^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}(-a)^2x^{m-2}+\dots(-a)^m,$$

т.-е. $(x-a)^m = x^m - max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2}-\dots+(-1)^m a^m$,

и, слѣд., въ разложеніи $(x-a)^m$ знаки $+$ и $-$ чередуются.

10) Положивъ въ послѣднемъ равенствѣ $x = a = 1$, находимъ:

$$0 = 1 - m + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \ldots + (-1)^m,$$

т.-е. сумма биноміальныхъ коэффиціентовъ, стоящихъ на нечетныхъ мѣстахъ, равна суммѣ биноміальныхъ коэффиціентовъ, стоящихъ на четныхъ мѣстахъ.

333. Практическій пріемъ. Когда x и a означаютъ какія-либо сложныя алгебраическія выраженія, то, для удобства примѣненія формулы бинома, обыкновенно поступаютъ такъ: пишутъ въ одной строкѣ коэффиціенты разложенія; подъ ними, въ другой строкѣ, соотвѣтствующія степени x, т.-е. $x^m, x^{m-1}, x^{m-2}, \ldots 1$ (ихъ удобнѣе писать, начиная съ конца); подъ ними, въ третьей строкѣ, соотвѣтствующія степени a, т.-е. $1, a, a^2, a^3, \ldots a^m$; затѣмъ перемножаютъ соотвѣтственные члены трехъ строкъ и полученныя произведенія соединяютъ знакомъ $+$, если было дано $(x+a)^m$, и попеременно знаками $+$ и $-$, если было дано $(x-a)^m$.

Для примѣра отыщемъ разложеніе $(4a^2x^3 - 3b)^4$:

1	4	6	4	1
$256a^8x^{12}$	$64a^6x^9$	$16a^4x^6$	$4a^2x^3$	1
1	$3b$	$9b^2$	$27b^3$	$81b^4$

$$256a^8x^{12} - 768a^6bx^9 + 864a^4b^2x^6 - 432a^2b^3x^3 + 81b^4.$$

334. Примѣненіе формулы бинома къ многочлену. Формула бинома Ньютона позволяетъ возвышать въ степени трехчленъ и вообще многочленъ. Такъ:

$$(a+b+c)^4 = [(a+b)+c]^4 = (a+b)^4 + 4c(a+b)^3 + 6c^2(a+b)^2 + 4c^3(a+b) + c^4$$

Разложивъ $(a+b)^4$, $(a+b)^3$, $(a+b)^2$, окончательно получимъ:

$$(a+b+c)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 + 4a^3c + 12a^2bc + 12ab^2c + 4b^3c$$
$$+ 6a^2c^2 + 12abc^2 + 6b^2c^2 + 4ac^3 + 4bc^3 + c^4.$$

335. Сумма одинаковыхъ степеней членов ариѳметической прогрессіи. Укажемъ одно изъ интересныхъ примѣненій формулы бинома. Пусть имѣемъ ариѳметическую прогрессію, содержащую $n+1$ членовъ:

$$\div\, a, b, c \ldots k, l.$$

Если разность ея d, то $b = a + d$, $c = b + d, \ldots l = k + d$. Возвысивъ эти равенства по формулѣ бинома Ньютона въ $m+1$ степень, получимъ слѣдующихъ равенствъ:

$$b^{m+1} = (a+d)^{m+1} = a^{m+1} + (m+1)a^m d + \frac{(m+1)m}{1.2} a^{m-1}d^2 + \ldots + d^{m+1},$$

$$c^{m+1} = (b+d)^{m+1} = b^{m+1} + (m+1)b^m d + \frac{(m+1)m}{1.2} b^{m-1}d^2 + \ldots + d^{m+1},$$

. . . .

$$l^{m+1} = (k+d)^{m+1} = k^{m+1} + (m+1)k^m d + \frac{(m+1)m}{1.2} k^{m-1}d^2 + \ldots + d^{m+1},$$

Сложивъ эти равенства и положивъ для краткости:

$$S_m = a^m + b^m + c^m + \ldots + k^m,$$
$$S_{m-1} = a^{m-1} + b^{m-1} + c^{m-1} + \ldots + k^{m-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_1 = a + b + c \ldots + k,$$

получимъ (члены: $b^{m+1} \ldots k^{m+1}$ сократятся):

$$l^{m+1} = a^{m+1} + (m+1)dS_m + \frac{(m+1)m}{1.2}d^2S_{m-1} + \ldots + nd^{m+1}.$$

Изъ этого уравненія опредѣлимъ S_m, если извѣстны S_{m-1}, $S_{m-2}, \ldots S_1$. Полагая послѣдовательно $m = 1, 2, 3 \ldots$, найдемъ S_1, потомъ S_2, затѣмъ S_3 и т. д.

336. Сумма одинаковыхъ степеней чиселъ натуральнаго ряда. Примѣнивъ выведенное въ предыдущемъ параграфѣ уравненіе къ прогрессіи:

$$\div 1, 2, 3, 4, \ldots n, n+1,$$

получимъ:

$$(n+1)^{m+1} = 1 + (m+1)S_m + \frac{(m+1)m}{1.2}S_{m-1} + \ldots + n.$$

Полагая $m = 1$, найдемъ:

$$(n+1)^2 = 1 + 2S_1 + n; \text{ откуда: } S_1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

При $m = 2$ получимъ:

$$(n+1)^3 = 1 + 3S_2 + 3S_1 + n = 1 + 3S_2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n,$$

откуда: $$S_2 = \frac{(n+1)^3 - (n+1)}{3} - \frac{3n(n+1)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} =$$
$$= \frac{n(2n^2 + n + n + 1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{2n+1}{3} = S_1 \cdot \frac{2n+1}{3}.$$

При $m = 3$ находимъ:

$$(n+1)^4 = 1 + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n = 1 + 4S_3 + n(n+1)(2n+1) + $$
$$+ 2n(n+1) + n$$

откуда: $$S_3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = S_1^2.$$

Подобнымъ же образомъ можно было бы найти S_4, S_5 и т. д. Формулы для $m = 1, 2, 3$ полезно запомнить:

1⁰. Сумма S_1 первыхъ степеней $= 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2⁰. Сумма S_2 квадратовъ $= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = (1 + 2 + \ldots + n) \cdot \frac{2n+1}{3}$.

3⁰. Сумма S_3 кубовъ $= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = S_1^2$.

ГЛАВА III.

Непрерывныя дроби.

337. Опредѣленіе. Непрерывною или цѣлною дробью называется дробь вида:

$$a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}} \text{ — или короче: } a + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots$$

гдѣ цѣлое число a складывается съ дробью, у которой числитель есть 1, а знаменатель цѣлое число a_1, сложенное съ дробью, у которой числитель есть 1, а знаменатель цѣлое число a_2, сложенное съ дробью, и т. д. (всѣ цѣлыя числа предполагаются положительными, число a можетъ быть 0).

Дроби: $\frac{a}{1}$, $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$, $\frac{1}{a_3}$ и т. д. наз. **составляющими дробями** или **звеньями**. Непрерывная дробь наз. **конечною** или **безконечною**, смотря по тому, будетъ ли у нея число звеньевъ конечное или безконечное. Мы будемъ разсматривать сначала только дроби конечныя.

Написанную выше непрерывную дробь сокращенно изображаютъ такъ:

$$(a,\ a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots).$$

Напримѣръ, дроби: $3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3}$ $\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{17}$

сокращенно изображаются: (3, 2, 1, 3) и (0, 2, 1, 17).

338. Теорема. Всякую конечную непрерывную дробь можно обратить въ равную ей обыкновенную.

Док. Непрерывная дробь представляетъ собою рядъ ариѳметическихъ дѣйствій надъ цѣлыми и дробными числами, а именно сложенія (указывается знакомъ +) и дѣленія (указывается горизонтальной чертой); если данная непрерывная дробь конеч

ная, то число этихъ дѣйствій конечно, и мы можемъ ихъ выполнить. Въ результатѣ получимъ обыкновенную дробь. Пусть, напр., имѣемъ такую непрерывную дробь:

$$(2, 3, 1, 4) = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}.$$

Производимъ указанныя дѣйствія:

$$1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}, \quad 1 : \frac{5}{4} = \frac{4}{5}, \quad 3 + \frac{4}{5} = \frac{19}{5}, \quad 1 : \frac{19}{5} = \frac{5}{19}, \quad 2 + \frac{5}{19} = \frac{43}{19}.$$

Это и есть обыкновенная дробь, равная данной непрерывной.

389. Обратная теорема. Всякую положительную обыкновенную дробь можно обратить (развернуть) въ равную ей конечную непрерывную.

Док. Пусть дана обыкновенная положительная дробь $\frac{A}{B}$.

Исключивъ изъ нея цѣлое число, получимъ:

$$\frac{A}{B} = a + \frac{r}{B},$$

гдѣ a есть цѣлое частное, а r остатокъ отъ дѣленія A на B (если дробь $\frac{A}{B}$ правильная, то $a = 0$ и $r = A$).

Раздѣливъ оба члена дроби $\frac{r}{B}$ на r, получимъ:

$$\frac{r}{B} = \frac{1}{B : r} = \frac{1}{a_1 + \frac{r_1}{r}},$$

гдѣ a_1 есть цѣлое частное, а r_1—остатокъ отъ дѣленія B на r.

Раздѣливъ оба члена дроби $\frac{r_1}{r}$ на r_1, получимъ:

$$\frac{r_1}{r} = \frac{1}{r : r_1} = \frac{1}{a_2 + \frac{r_2}{r_1}},$$

гдѣ a_2 есть цѣлое частное, а r_2 остатокъ отъ дѣленія r на r_1. Продолжая этотъ пріемъ далѣе, будемъ послѣдовательно получать:

$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{1}{r_1 : r_2}=\frac{1}{a_3+\frac{r_3}{r_2}},\ \frac{r_3}{r_2}=\frac{1}{r_2 : r_3}=\frac{1}{a_4+\frac{r_4}{r_3}},\ \text{и т. д.}$$

Такъ какъ $B>r>r_1>r_2>r_3\ldots$ и эти числа всѣ цѣлыя, то, продолживъ этотъ пріемъ достаточно далеко, мы дойдемъ, очевидно, до нѣкотораго остатка, который будетъ равенъ 0.

$$\text{Пусть } r_n=0, \text{ т. е. } \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}=\frac{1}{a_n}.$$

Тогда, путемъ подстановки, мы получимъ конечную непрерывную дробь, равную данной обыкновенной:

$$\frac{A}{B}=a+\frac{r}{B}=a+\frac{1}{a_1+\frac{r_1}{r}}=a+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{r_2}{r_1}}}=a+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\ldots+\frac{1}{a_n}}}.$$

Замѣчаніе. Изъ разсмотрѣнія этого пріема слѣдуетъ, что числа a, a_1, $a_2,\ldots a_n$ суть цѣлыя частныя, получаемыя при послѣдовательномъ дѣленіи A на B, потомъ B на первый остатокъ, перваго остатка на второй, и т. д. (иначе сказать, это суть цѣлыя частныя, получаемыя при нахожденіи общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ A и B способомъ послѣдовательнаго дѣленія). Вслѣдствіе этого числа a_1, a_2, $a_3\ldots a_n$ наз. **частными** непрерывной дроби.

Примѣры.

1) Обратить въ непрерывную дробь число $\frac{40}{70}$.

Такъ какъ

- $40 : 17 = 2$ (остатокъ 6)
- $17 : 6 = 2$ (остатокъ 5)
- $6 : 5 = 1$ (остатокъ 1)
- $5 : 1 = 5$ (остатокъ 0)

то

$$\frac{40}{17}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}.$$

2) Обратить въ непрерывную дробь число $\frac{7}{120}$.

Такъ какъ

$$\begin{array}{r|l} 7 & 120 \\ \hline 120 & 7 \quad 0 \\ 7 & 1 \;\; 17 \\ 0 & 7 \end{array}$$

то $\frac{7}{120} = \frac{1}{17 + \frac{1}{7}}$.

340. Подходящія дроби. Если въ непрерывной дроби возьмемъ нѣсколько звеньевъ съ начала, отбросивъ всѣ остальныя, и составленную ими непрерывную дробь обратимъ въ обыкновенную, то получимъ такъ называемую **подходящую дробь**. Первая подходящая дробь получится, когда возьмемъ одно первое звено; вторая—когда возьмемъ два первыхъ звена, и т. д.

Такимъ образомъ, для непрерывной дроби:

$3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}$ первая подход. дробь есть . . $\frac{3}{1}$,

вторая $3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$,

третья $3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}} = \frac{10}{3}$.

Четвертая подходящая дробь представитъ въ этомъ примѣрѣ точную величину непрерывной дроби $\frac{27}{8}$.

Когда въ непрерывной дроби нѣтъ цѣлаго числа, то первая подходящая дробь есть 0.

341. Законъ составленія подходящихъ дробей. Составимъ для непрерывной дроби $(a, a_1, a_2, a_3 \ldots)$ первыя три подходящія дроби:

$$1)\ \frac{a}{1}, \qquad 2)\ a + \frac{1}{a_1} = \frac{aa_1 + 1}{a_1},$$

$$3)\ a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = a + \cfrac{1}{\cfrac{a_1a_2 + 1}{a_2}} = a + \frac{a_2}{a_1a_2 + 1} = \frac{aa_1a_2 + a + a_2}{a_1a_2 + 1} =$$

$$= \frac{(aa_1 + 1)a_2 + a}{a_1a_2 + 1}.$$

Сравнивъ третью подходящую дробь съ двумя первыми, замѣтимъ, что числитель третьей подходящей дроби получится, если числителя второй подходящей дроби умножимъ на соотвѣтствующее частное (т.-е. на a_2) и къ полученному произведенію приложимъ числителя первой подходящей дроби; знаменатель третьей подходящей дроби получится подобнымъ же образомъ изъ знаменателей предыдущихъ двухъ подходящихъ дробей.

Докажемъ, что этотъ законъ примѣнимъ ко всякой подходящей дроби, слѣдующей за второй.

Теорема. **Чтобы получить числителя $(n+1)$-й подходящей дроби, достаточно числителя n-й подходящей дроби умножить на соотвѣтствующее частное (т.-е. на a_n) и къ произведенію приложить числителя $(n-1)$-й подходящей дроби. Знаменатель $(n+1)$-й подходящей дроби подобнымъ же способомъ получается изъ знаменателей n-й и $(n-1)$-й подходящихъ дробей.**

Употребимъ доказательство отъ n къ $(n+1)$, т.-е. докажемъ, что если эта теорема примѣнима къ n-й подходящей дроби, то она примѣнима и къ $(n+1)$-й подходящей дроби.

Обозначимъ 1-ю, 2-ю, 3-ю и т. д. подходящія дроби послѣдовательно такъ:

$$\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3} \ldots \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \frac{P_n}{Q_n}, \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} \ldots$$

и замѣтимъ, что соотвѣтствующія имъ частныя будутъ:

$$a, a_1, a_2 \ldots a_{n-2}, a_{n-1}, a_n \ldots$$

Допустимъ, что вѣрны равенства:

$$P_n = P_{n-1}a_{n-1} + P_{n-2}, \quad Q_n = Q_{n-1}a_{n-1} + Q_{n-2} \qquad (1)$$

и, слѣдовательно, $$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1}a_{n-1} + P_{n-2}}{Q_{n-1}a_{n-1} + Q_{n-2}}. \qquad (2)$$

Докажемъ, что въ такомъ случаѣ будетъ вѣрно равенство:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_n + P_{n-1}}{Q_n a_n + Q_{n-1}}. \qquad (3)$$

Изъ сравненія двухъ подходящихъ дробей:

$$\frac{P_n}{Q_n}=a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots+\cfrac{1}{a_{n-1}}}} \qquad \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}}}$$

усматриваемъ, что $(n+1)$-я подходящая дробь получится изъ n-й если въ послѣдней замѣнимъ число a_{n-1} на сумму $a_{n-1}+\frac{1}{a_n}$. Поэтому равенство [2] даетъ:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_{n-1}\left(a_{n-1}+\frac{1}{a_n}\right)+P_{n-2}}{Q_{n-1}\left(a_{n-1}+\frac{1}{a_n}\right)+Q_{n-2}}.$$

Раскрывъ скобки и умноживъ оба члена дроби на a_n, получимъ:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_{n-1}a_{n-1}a_n+P_{n-1}+P_{n-2}a_n}{Q_{n-1}a_{n-1}a_n+Q_{n-1}+Q_{n-2}a_n}=\frac{(P_{n-1}a_{n-1}+P_{n-2})a_n+P_{n-1}}{(Q_{n-1}a_{n-1}+Q_{n-2})a_n+Q_{n-1}}$$

Принявъ во вниманіе равенство (1), можемъ окончательно написать:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_na_n+P_{n-1}}{Q_na_n+Q_{n-1}}.$$

Это и есть равенство (3), которое требовалось доказать.

Такимъ образомъ, если доказываемый законъ вѣренъ для n-й подходящей дроби, то онъ будетъ вѣренъ и для $(n+1)$-й подходящей дроби. Но мы видѣли, что онъ вѣренъ для 3-й подходящей дроби; слѣд., по доказанному, онъ примѣнимъ для 4-й подходящей дроби, а если для 4-й, то и для 5-й и т. д.

Примѣръ. Составимъ всѣ подходящія дроби для слѣдующей непрерывной:

$$a=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}}}=(2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 3,\ 1,\ 5).$$

Вычисленіе всего удобнѣе расположить такъ:

Цѣлыя частныя:		3	2	3	1	5
Подход. дроби.	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{25}{9}$	$\frac{86}{31}$	$\frac{111}{40}$	$\frac{641}{231}$

Первыя двѣ подходящія дроби найдемъ непосредственно; это будутъ: $\frac{2}{1}$ и $\frac{3}{1}$. Остальныя дроби получимъ, основываясь на доказанномъ законѣ. Для памяти размѣщаемъ въ верхней строкѣ цѣлыя частныя, съ 3-го до послѣдняго.

342. Теорема. Точная величина конечной непрерывной дроби заключается между всякими двумя послѣдовательными подходящими дробями, при чемъ она ближе къ послѣдующей, чѣмъ къ предыдущей.

Док. Пусть имѣемъ конечную непрерывную дробь:

$$(a,\ a_1,\ a_2 \ldots a_{n-1},\ a_n,\ a_{n+1} \ldots a_s) = A,$$

величину которой обозначимъ черезъ A. Возьмемъ какія-нибудь три послѣдовательныя подходящія дроби:

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},\ \frac{P_n}{Q_n},\ \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}.$$

По доказанному въ предыдущемъ параграфѣ:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_n + P_{n-1}}{Q_n a_n + Q_{n-1}}.$$

Если въ правую часть этого равенства вмѣсто a_n вставимъ $y = (a_n, a_{n+1} \ldots a_s)$, то получимъ точную величину A непрерывной дроби; значитъ:

$$A = \frac{P_n y + P_{n-1}}{Q_n y + Q_{n-1}},$$

откуда: $$AQ_n y + AQ_{n-1} = P_n y + P_{n-1},$$

или $$AQ_n y - P_n y = P_{n-1} - AQ_{n-1}$$

и, значитъ, $$yQ_n\left(A - \frac{P_n}{Q_n}\right) = Q_{n-1}\left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - A\right).$$

Изъ послѣдняго равенства можемъ вывести два слѣдующихъ заключенія:

1) Такъ какъ числа y, Q_n и Q_{n-1}—положительныя, то разности,

стоящія внутри скобокъ, должны быть одновременно положительны, или одновременно отрицательны; значитъ:

$$\begin{cases} \text{если } A-\frac{P_n}{Q_n}>0, \\ \text{то и } \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-A>0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \text{если } A-\frac{P_n}{Q_n}<0; \\ \text{то и } \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-A<0 \end{cases}$$

т.-е. $$\begin{cases} \text{если } A>\frac{P_n}{Q_n}, \\ \text{то и } \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}>A \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \text{если } A<\frac{P_n}{Q_n} \\ \text{то и } \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}<A. \end{cases}$$

Слѣдовательно, величина A заключена между всякими двумя послѣдовательными подходящими дробями.

2) Такъ какъ $y>1$ и $Q_n>Q_{n-1}$, при чемъ числа Q_n и Q_{n-1} положительныя, то изъ того же равенства выводимъ:

$$\text{абс. вел.} \left(A-\frac{P_n}{Q_n}\right)<\text{абс. вел.} \left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-A\right).$$

Отсюда слѣдуетъ, что A ближе къ $\frac{P_n}{Q_n}$, чѣмъ къ $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Такъ какъ, очевидно, $A>a$, т.-е. $A>\frac{P_1}{Q_1}$; то $A<\frac{P_2}{Q_2}$, $A>\frac{P_3}{Q_3}$, $A<\frac{P_4}{Q_4}$, и т. д., т.-е. точная величина непрерывной дроби болѣе всякой подходящей дроби нечетнаго порядка и менѣе всякой подходящей дроби четнаго порядка.

343. Теорема. Разность между всякими двумя рядомъ стоящими подходящими дробями равна единицѣ, взятой со знакомъ $+$ или $-$ и дѣленной на произведеніе знаменателей этихъ подходящихъ дробей.

Док. Такъ какъ $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_{n+1}Q_n-Q_{n+1}P_n}{Q_{n+1}Q_n}$,

то очевидно, что знаменатель этой разности удовлетворяетъ требованію теоремы. Остается доказать, что числитель равенъ ± 1.

Такъ какъ: $P_{n+1} = P_n a_n + P_{n-1}$ и $Q_{n+1} = Q_n a_n + Q_{n-1}$,

то $P_{n+1} Q_n - Q_{n+1} P_n = (P_n a_n + P_{n-1}) Q_n - (Q_n a_n + Q_{n-1}) P_n =$

$= P_n a_n Q_n + P_{n-1} Q_n - Q_n a_n P_n - Q_{n-1} P_n = -(P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n)$

Выраженіе, стоящее въ скобкахъ, представляетъ собою числителя дроби, которая получится отъ вычитанія изъ $\frac{P_n}{Q_n}$ дроби $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$. Слѣд., мы доказали, что абсолютная величина числителя дроби, получаемой отъ вычитанія $\frac{P_n}{Q_n}$ изъ $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, равна абсолютной величинѣ числителя дроби, получаемой отъ вычитанія $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ изъ $\frac{P_n}{Q_n}$; другими словами, абсолютная величина числителя дроби, получаемой отъ вычитанія одной изъ другой двухъ рядомъ стоящихъ подходящихъ дробей, есть число постоянное для всѣхъ подходящихъ дробей. Но разность между 2-й и 1-й подходящими дробями есть:

$$\left(a + \frac{1}{a_1}\right) - a = \frac{1}{a_1}.$$

Слѣд., числитель разности между всякими двумя рядомъ стоящими подходящими дробями, по абсолютной своей величинѣ, равенъ 1.

Такъ, если взять примѣръ, приведенный на стран. 395, то найдемъ:

$$\frac{3}{1} - \frac{2}{1} = \frac{1}{1}; \; \frac{11}{4} - \frac{3}{1} = \frac{-1}{4}; \; \frac{25}{9} - \frac{11}{4} = \frac{1}{36}; \; \frac{86}{31} - \frac{25}{9} = \frac{-1}{279}; \text{ и т. д.}$$

Слѣдствія. I. Всякая подходящая дробь есть дробь несократимая, потому что если бы дробь $\frac{P_n}{Q_n}$ могла быть сокращена на нѣкотораго дѣлителя $m > 1$, то разность $P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n$ дѣлилась бы на m, что невозможно, такъ какъ эта разность равна ± 1.

II. Если вмѣсто точной величины непрерывной дроби возьмемъ

подходящую дробь $\frac{P_n}{Q_n}$, то сдѣлаемъ ошибку, меньшую каждаго изъ трехъ слѣдующихъ чиселъ:

$$\frac{1}{Q_nQ_{n+1}},\ \frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})},\ \frac{1}{Q_n^2}.$$

Дѣйствительно, если A есть точная величина непрерывной дроби, то разность $A-\frac{P_n}{Q_n}$ численно меньше разности $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n}$ абсолютная величина которой, по доказанному, равна $\frac{1}{Q_nQ_{n+1}}$. Съ другой стороны, такъ какъ $Q_{n+1}=Q_na_n+Q_{n+1}$, гдѣ $a_n>1$ то $Q_{n+1}>Q_n+Q_{n-1}$; слѣд.,

$$Q_nQ_{n+1}>Q_n(Q+Q_{n-1})\ \text{и}\ \frac{1}{Q_nQ_{n+1}}<\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})},$$

и потому абсол. величина разности $A-\frac{P_n}{Q_n}$ меньше $\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})}$.

Наконецъ, такъ какъ $Q_{n+1}>Q_n$, то $Q_{n+1}Q_n>Q_n^2$, и потому

$$\frac{1}{Q_nQ_{n+1}}<\frac{1}{Q_n^2}.$$

Слѣд., абсолютная величина разности $A-\frac{P_n}{Q_n}$ меньше $\frac{1}{Q_n^2}$.

Изъ трехъ указанныхъ предѣловъ погрѣшности самый меньшій есть $\frac{1}{Q_nQ_{n+1}}$; но его вычисленіе предполагаетъ, что знаменатель подходящей дроби, слѣдующей за той, которую мы приняли за приближеніе, извѣстенъ, что не всегда имѣетъ мѣсто. Вычисленіе предѣла $\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})}$ можетъ быть выполнено только тогда, когда извѣстенъ знаменатель предшествующей подходящей дроби. Когда же извѣстна одна подходящая дробь $\frac{P_n}{Q_n}$, возможно только указаніе предѣла погрѣшности $\frac{1}{Q_n^2}$.

Напр., если мы знаемъ, что нѣкоторая подходящая дробь данной непрерывной есть $\frac{45}{17}$, то можно сказать, что $\frac{45}{17}$ точно до $\frac{1}{17^2}=\frac{1}{289}$. Если, кромѣ того, знаемъ, что знаменатель предшествующей подходящей дроби есть, напр., 8, то можемъ сказать что $\frac{45}{17}$ точно до $\frac{1}{17(17+8)}=\frac{1}{425}$. Наконецъ, когда еще знаемъ что знаменатель слѣдующей подходящей дроби есть, напр., 37, то можемъ ручаться, что $\frac{45}{17}$ разнится отъ точнаго значенія непрерывной дроби менѣе, чѣмъ на $\frac{1}{17.37}=\frac{1}{629}$.

344. Теорема. Подходящая дробь ближе къ точной величинѣ непрерывной дроби, чѣмъ всякая другая дробь съ тѣмъ же или съ меньшимъ знаменателемъ.

Док. Допустимъ, что существуетъ дробь $\frac{a}{b}$, менѣе отличающаяся отъ точной величины непрерывной дроби A, чѣмъ подходящая дробь $\frac{P_n}{Q_n}$, и пусть $b \leqslant Q_n$. Докажемъ, что это предположеніе невозможно. Такъ какъ $\frac{P_n}{Q_n}$ ближе къ A, чѣмъ $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, и $\frac{a}{b}$ ближе къ A, чѣмъ $\frac{P_n}{Q_n}$, то, и подавно, $\frac{a}{b}$ ближе къ A, чѣмъ $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$; такъ какъ, кромѣ того, A заключается между $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ и $\frac{P_n}{Q_n}$, то абсолютная величина разности $\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ больше абсолютной величины разности $\frac{a}{b}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$; значитъ, обращая вниманіе только на абсолютныя величины, можемъ написать:

$$\frac{1}{Q_nQ_{n-1}}>\frac{aQ_{n-1}-bP_{n-1}}{bQ_{n-1}},$$

$$Q_nQ_{n-1}\geqslant bQ_{n-1}.$$

Перемноживъ почленно эти неравенства (беря только абсолютныя величины), получимъ:

$$1>aQ_{n-1}-bP_{n-1}.$$

Такъ какъ aQ_{n-1} и bP_{n-1} суть числа цѣлыя, то это неравенство возможно только при условіи:

$$aQ_{n-1}-bP_{n-1}=0;\ \text{откуда:}\ \frac{a}{b}=\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}.$$

Но это равенство невозможно, такъ какъ, по предположенію $\frac{a}{b}$ ближе подходитъ къ A, чѣмъ $\frac{P_n}{Q_n}$, тогда какъ $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ по доказанному (§ 342),

больше разнится отъ A, чѣмъ $\frac{P_n}{Q_n}$. Невозможность равенства доказываетъ невозможность сдѣланнаго предположенія.

Изъ доказанной теоремы слѣдуетъ, что подходящія дроби представляютъ простѣйшіе виды приближеній къ точному значенію непрерывной дроби.

345. Обращеніе ирраціональнаго числа въ безконечную непрерывную дробь. Теорема I. **Всякое положительное ирраціональное число x можетъ быть представлено въ видѣ выраженія:**

$$x = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{x_n}}}}} = (a, a_1, a_2, \dots a_{n-1}, x_n),$$

въ которомъ буквы a, a_1, a_2, ... a_{n-1} означаютъ числа цѣлыя положительныя (при чемъ a можетъ быть и 0) и которыхъ число n можетъ быть какъ угодно велико; буква же x означаетъ нѣкоторое положительное ирраціональное число, большее 1.

Док. Пусть наибольшее цѣлое число, заключающееся въ x, есть a (если $x < 1$, то это цѣлое число равно 0). Тогда x можно выразить суммою $a + x'$, гдѣ x' есть нѣкоторое положительное ирраціональное число, меньшее 1. Введемъ новое число x_1, связанное съ x' уравненіемъ: $x' = \frac{1}{x_1}$.

Тогда x_1 должно быть положительнымъ ирраціональнымъ числомъ, большимъ 1, и мы будемъ имѣть:

$$x = a + \frac{1}{x_1}. \qquad (1)$$

Преобразуя x_1 такъ, какъ было сейчасъ сдѣланно съ x, получимъ:

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \qquad (2)$$

гдѣ a_1 есть наибольшее цѣлое число, заключающееся въ x_1 (это число больше 0), а x_2 — нѣкоторое ирраціональное число, большее 1. Въ свою очередь можемъ положить:

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3} \quad (3) \qquad\qquad x_3 = a_3 + \frac{1}{x_4} \quad (4)$$

и т. д. безъ конца (такъ какъ всегда будемъ приходить къ положительному ирраціональному числу x_k, большему 1).

Ограничиваясь n такими равенствами и сдѣлавъ подстановки, найдемъ для x то выраженіе, которое требовалось доказать.

Такъ какъ число звеньевъ съ цѣлыми знаменателями: a, a_1, a_2... a_{n-1} можно сдѣлать какъ угодно большимъ, то говорятъ, что **всякое положительное ирраціональное число x обращается (развертывается) въ безконечную непрерывную дробь:** $(a, a_1, a_2, a_3 \dots)$. Если примемъ еще во вниманіе теорему

§ 339, то можемъ теперь сказать, что всякое положительное число обращается въ непрерывную дробь, конечную, если это число раціональное, и безконечную, если оно ирраціональное.

Теорема 2. Всякое ирраціональное число x можно разсматривать, какъ предѣлъ, къ которому стремится неограниченный рядъ подходящихъ дробей: $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3} \ldots$, составленныхъ для безконечной непрерывной дроби, въ которую обращается это число x.

Док. Выраженіе $(a, a_1, a_2, a_{n-1}, x_n)$, выведенное нами для ирраціональнаго числа x, отличается отъ разсмотрѣнныхъ раньше конечныхъ непрерывныхъ дробей только тѣмъ, что въ послѣднихъ всѣ знаменатели суть числа цѣлыя, а въ этомъ выраженіи знаменатель x_n есть ирраціональное число большее 1. Но, просматривая доказательства теоремъ §§ 341, 342 и 343, мы видимъ, что въ нихъ нигдѣ не требуется допущенія чтобы знаменатели отдѣльныхъ звеньевъ были непремѣнно цѣлыми; поэтому можемъ сказать, что теоремы эти примѣнимы и къ выраженію, выведенному нами теперь для ирраціональнаго числа x. Въ частности, напр., мы можемъ утверждать, что величина x заключается между каждыми двумя подходящими дробями, и что если вмѣсто точной величины x возьмемъ какую-нибудь подходящую дробь $\frac{P_n}{Q_n}$, то сдѣлаемъ ошибку, меньшую $\frac{1}{Q_n^2}$. Такъ какъ $Q_n = Q_{n-1}a_{n-1} + Q_{n-2}$, гдѣ всѣ числа Q и a не меньше 1, то, при неограниченномъ увеличеніи n, число Q_n возрастаетъ неограниченно и, слѣд. дробь $\frac{1}{Q_n^2}$ уменьшается безпредѣльно; значитъ, абсолютная величина разности между постояннымъ числомъ x и перемѣннымъ числомъ $\frac{P_n}{Q_n}$ при достаточно большемъ n дѣлается (и при дальнѣйшемъ возрастаніи n—остается) меньше любого положительнаго числа, какъ бы мало оно ни было. А это, согласно опредѣленію предѣла, означаетъ, что *пред.* $\frac{P_n}{Q_n} = x$.

348. Періодическая непрерывная дробь. Такъ наз. безконечная непрерывная дробь, у которой частныя повторяются въ одной и той же послѣдовательности. Таковы, напр., дроби:

Чистая періодическая: Смѣшанная періодическая:

$$2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}} \qquad \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}}$$

Точную величину періодической непрерывной дроби можно опредѣлить слѣдующимъ образомъ.

Пусть намъ извѣстно, что нѣкоторое ирраціональное число x даетъ безконечную непрерывную дробь:

$$x = (a, a_1, a_2 \ldots, a_n, a, a_1, a_2 \ldots a_n \ldots).$$

Тогда, очевидно, можемъ написать:

$$x = (a, a_1, a_2, \ldots a_n, x).$$

Допустимъ теперь, что $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ есть та подходящая дробь, которая получится, если мы остановимся на послѣднемъ звенѣ перваго періода, а $\frac{P_n}{Q_n}$ и $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ — двѣ предшествующія подходящія дроби. Очевидно, что точная величина данной непрерывной дроби получится изъ $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, если въ послѣдней на мѣсто a_n подставимъ сумму $a_n + \frac{1}{x}$.

Но $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_n + P_{n-1}}{Q_n a_n + Q_{n-1}}$; слѣд. $x = \frac{P_n\left(a_n + \frac{1}{x}\right) + P_{n-1}}{Q_n\left(a_n + \frac{1}{x}\right) + Q_{n-1}}$.

или $x = \frac{P_n a_n x + P_n + P_{n-1}x}{Q_n a_n x + Q_n + Q_{n-1}x} = \frac{(P_n a_n + P_{n-1})x + P_n}{(Q_n a_n + Q_{n-1})x + Q_n} = \frac{P_{n+1}x + P_n}{Q_{n+1}x + Q_n}$.

Отсюда видно, что x есть корень квадратнаго уравненія:

$$Q_{n+1}x^2 + (Q_n - P_{n+1})x - P_n = 0.$$

Это уравненіе имѣетъ вещественные корни, изъ нихъ только одинъ положительный; этотъ корень и есть значеніе данной періодической дроби.

Подобнымъ же образомъ можемъ опредѣлить точную величину смѣшанной періодической дроби. Пусть $x = (a, a_1 \ldots a_n, b_1, b_2 \ldots b_m, b_1, b_2 \ldots b_m \ldots)$ гдѣ періодъ образуютъ частныя: $b_1, b_2, b_3 \ldots b_m$. Тогда предварительно найдемъ $y = (b_1, b_2, b_m, b_1, b_2 \ldots)$, какъ указано выше, послѣ чего x опредѣлимъ изъ равенства:

$$x = \frac{P_{n+1}y + P_n}{Q_{n+1}y + Q_n}.$$

Примѣръ. Найти величину періодической дроби:

$$x = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \ldots}}}}}}$$

Опредѣлимъ сначала $y = 3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \ldots}}}$

$$y = 3 + \frac{y}{5y + 1} = \frac{15y + 3 + y}{5y + 1} = \frac{16y + 3}{5y + 1}.$$

$$5y^2 - 15y - 3 = 0;\ y = \frac{15 + \sqrt{225 + 60}}{10} = \frac{15 + \sqrt{285}}{10}.$$

$$x = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{y}}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{y}{y+1}} = 2 + \frac{y+1}{3y+2} = \frac{7y+5}{3y+2};$$

$$x = \frac{7(15 + \sqrt{285}) + 50}{3(15 + \sqrt{285}) + 20} = \frac{155 + 7\sqrt{285}}{65 + 3\sqrt{285}} = \frac{409 - \sqrt{285}}{166}.$$

ГЛАВА IV.

Нѣкоторыя приложенія непрерывныхъ дробей.

347. Приближенное значеніе данной ариѳметической дроби. Когда числитель и знаменатель несократимой ариѳметической дроби выражены большими числами, является потребность выразить эту дробь въ болѣе простомъ, хотя и приближенномъ, видѣ. Для этого достаточно обратить эту дробь въ непрерывную и найти ту или другую подходящую дробь, смотря по желаемой степени приближенія.

Примѣръ. Зная, что число π, представляющее отношеніе окружности къ ея діаметру, заключено между двумя дробями: $a = 3{,}1415926$ и $b = 3{,}1415927$, найти простѣйшія приближенныя значенія π.

Обративъ дроби a и b въ непрерывныя и взявъ только общія частныя, найдемъ:

$$\pi = (3,\ 7,\ 15,\ 1\ldots)\ ^{1)}.$$

1) Нельзя допустить, чтобы число π, заключающееся между a и b, будучи развернуто въ непрерывную дробь, не сохраняло какого-либо изъ тѣхъ частныхъ, которыя общи числамъ a и b. Дѣйствительно, если допустимъ, что какое-нибудь частное, напр., второе, было бы у числа π не 7, какъ у a и b, а меньше 7-и, напр 6, то тогда, сравнивъ два выраженія:

$$\pi = 3 + \frac{1}{6 + \ldots} \qquad b = 3 + \frac{1}{7 + \ldots},$$

и принявъ во вниманіе, что въ непрерывныхъ дробяхъ къ любому частному

Подходящія дроби будутъ:

		15	1
3	22	333	355
1	7	106	113

Приближеніе $\frac{22}{7}$ было найдено **Архимедомъ**: оно вѣрно до $\frac{1}{7 . 106} = \frac{1}{742}$, значитъ, и подавно вѣрно до $\frac{1}{100}$. Число $\frac{355}{113}$ было указано **Адріаномъ Меціемъ**; взявъ это число вмѣсто π, сдѣлаемъ ошибку, меньшую $\frac{1}{113 . 33102} = \frac{1}{3740526}$, т.-е. во всякомъ случаѣ меньшую 1 милліонной.

Приближенія Архимеда и Мецiя, какъ четнаго порядка, болѣе π.

348. Извлеченіе квадратнаго корня. Пусть требуется найти $\sqrt{41}$ при помощи непрерывныхъ дробей. Разсуждаемъ такъ: наибольшее цѣлое число, заключающееся въ $\sqrt{41}$, есть 6; поэтому можемъ положить:

$$\sqrt{41} = 6 + \frac{1}{x} \qquad (1)$$

Откуда: $\frac{1}{x} = \sqrt{41} - 6$; $x = \frac{1}{\sqrt{41} - 6} = \frac{\sqrt{41} + 6}{5}$.

Такъ какъ $\sqrt{41} + 6$ равняется 12 съ дробью, то наибольшее

прикладывается число, меньшее 1, мы получили бы слѣдующія неравенства:

$$6 + \cdots < 7 + \cdots; \ \frac{1}{6 + \cdots} > \frac{1}{7 + \cdots}; \ 3 + \frac{1}{6 + \cdots} > 3 + \frac{1}{7 + \cdots};$$

т.-е. $\pi > b$,

что противорѣчитъ заданію. Если допустимъ, что второе частное у числа π будетъ больше 7-и, напр. 8, то тогда, сравнивъ два выраженія:

$$\pi = 3 + \frac{1}{8 + \cdots} \qquad a = 3 + \frac{1}{7 + \cdots}$$

мы нашли бы, подобно предыдущему, что $\pi < a$, что также противорѣчитъ заданію. Значитъ, второе частное должно быть 7. Также можно разъяснить, что и всѣ другія частныя, общія числамъ a и b, сохранятся и у числа π.

цѣлое число, заключающееся въ дроби $\frac{\sqrt{41}+6}{5}$, есть 2; поэтому можемъ положить:

$$x=\frac{\sqrt{41}+6}{5}=2+\frac{1}{y}. \quad (2)$$

Откуда:
$$\frac{1}{y}=\frac{\sqrt{41}+6}{5}-2=\frac{\sqrt{41}-4}{5}.$$

$$y=\frac{5}{\sqrt{41}-4}=\frac{5(\sqrt{41}+4)}{25}=\frac{\sqrt{41}+4}{5}.$$

Такъ какъ $\sqrt{41}+4$ равняется 10 съ дробью, то наибольшее цѣлое число, заключающееся въ дроби $\frac{\sqrt{41}+4}{5}$, есть 2; потому можемъ положить:

$$y=\frac{\sqrt{41}+4}{5}=2+\frac{1}{z}.$$

Откуда: $\frac{1}{z}=\frac{\sqrt{41}-6}{5}$; $z=\frac{5}{\sqrt{41}-6}=\frac{5(\sqrt{41}+6)}{5}=\sqrt{41}+6$

Наибольшее цѣлое число, заключающееся въ $\sqrt{41}+6$, есть 12; поэтому можно положить:

$$z=\sqrt{41}+6=12+\frac{1}{v}. \quad (4)$$

Откуда
$$\frac{1}{v}=\sqrt{41}-6;\quad v=\frac{1}{\sqrt{41}-6}.$$

Сравнивая выраженіе для v съ выраженіемъ для x, находимъ, что $v=x$. Пользуясь равенствами (1), (2), (3) и (4), получимъ:

$$\sqrt{41}=6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{x}}}}=6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{12}\dots}}}}}$$

Такимъ образомъ, $\sqrt{41}$ выразился безконечною періодическою

непрерывною дробью, въ которой частныя 2, 2, 12 періодически повторяются [1]). Найдя подходящія дроби, получимъ приближенныя значенія $\sqrt{41}$:

		2	12	2	2	...
6	13	32	397	826	2049	...
1	2	5	62	129	320	...

подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$\sqrt{12} = (3, \underbrace{1, 1, 1, 1, 6}_{\text{періодъ.}}, 1, 1...); \quad \sqrt{29} = (5, \underbrace{2, 1, 1, 2, 10}_{\text{періодъ.}}...$$

349. Вычисленіе логариѳма. Пусть требуется вычислить Log 2 по основанію 10; другими словами, требуется рѣшить уравненіе $10^x = 2$. Сначала находимъ для x ближайшее цѣлое число. Такъ какъ $10^0 = 1$, а $10^1 = 10$, то x заключается между 0 и 1; слѣд., можно положить, что $x = \frac{1}{z}$; тогда $10^{\frac{1}{z}} = 2$, или $10 = 2^z$. Не трудно видѣть, что z заключается между 3 и 4; слѣд., можно положить, $z = 3 + \frac{1}{z_1}$;

тогда $$10 = 2^{3+\frac{1}{z_1}} = 2^3 . 2^{\frac{1}{z_1}} = 8 . 2^{\frac{1}{z_1}};$$

откуда $$2^{\frac{1}{z_1}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4};$$

слѣд.: $$2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{z_1}.$$

Испытаніемъ находимъ, что z_1 заключается между 3 и 4, потому можно положить: $z_1 = 3 + \frac{1}{z_2}$;

---

[1]) Можно было бы доказать, что непрерывная дробь, въ которую обращается квадратный корень изъ положительнаго цѣлаго числа, всегда періодична, при чемъ періодъ начинается со втораго частнаго и послѣднее частное въ періодѣ вдвое больше непеpiодическаго частнаго.

тогда $$2=\left(\frac{5}{4}\right)^{3+\frac{1}{z_2}}=\left(\frac{5}{4}\right)^{3}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z_2}}$$

откуда: $$\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z_2}}=2:\left(\frac{5}{4}\right)^{3}=\frac{128}{125};\quad\text{или}\quad\left(\frac{128}{125}\right)^{z_2}=\frac{5}{4}.$$

Снова испытаніемъ находимъ, что z_2 заключается между 9 и 10. Этотъ пріемъ можно продолжать далѣе. Довольствуясь приближенной величиной z_2, можемъ положить $z_2=9$;

слѣд., $$z_1=3+\frac{1}{9},\quad z=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9}}\quad\text{и}\quad x=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9}}}.$$

Обративъ эту непрерывную дробь въ обыкновенную, получимъ: $x=\frac{28}{93}=0{,}30107$. Этотъ результатъ вѣренъ до 4-го десятичнаго знака; болѣе точныя изысканія даютъ: $x=0{,}3010300$.

350. Нахожденіе пары рѣшеній неопредѣленнаго уравненія. Непрерывныя дроби даютъ средство найти цѣлыя рѣшенія неопредѣленнаго уравненія $ax+by=c$. Покажемъ это на слѣдующихъ двухъ примѣрахъ.

Примѣръ I. $43x+15y=8$.

Возьмемъ дробь $\frac{43}{15}$ и обратимъ ее въ непрерывную:

$$\frac{43}{15}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2}}}.$$

Найдемъ теперь предпослѣднюю подходящую дробь; это будетъ $\frac{20}{7}$. Такъ какъ послѣдняя подходящая дробь есть точное значеніе непрерывной дроби, т. е. $\frac{43}{15}$, а $\frac{20}{7}$ есть подходящая дробь нечетнаго порядка, то, на основаніи теоремъ §§ 342 (замѣчаніе) и 343, можемъ написать:

$$\frac{43}{15}-\frac{20}{7}=\frac{1}{15.7};\ \text{откуда: } 43.7-15.20=1.$$

Чтобы уподобить послѣднее тождество данному уравненію, умножимъ всѣ его члены на 8 и представимъ его такъ:

$$43.56+15(-160)=8.$$

Сравнивъ теперь это тождество съ нашимъ уравненіемъ, находимъ, что въ послѣднемъ за x можно принять число 56, а за y число —160. Тогда всѣ возможныя рѣшенія выразятся формулами (§ 275):

$$x = 56 - 15t;\ y = -160 + 43t.$$

Эти формулы можно упростить, замѣнивъ t на $t+3$ (что можно сдѣлать вслѣдствіе произвольности числа t):

$$x = 56 - 15(t+3) = 11 - 15t;\ y = -160 + 43(t+3) = -31 + 43t.$$

Примѣръ 2. $7x - 19y = 5$.

Обративъ дробь $\frac{7}{19}$ въ непрерывную, найдемъ:

$$\frac{7}{19} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}.$$

Предпослѣдняя подходящая дробь будетъ $\frac{3}{8}$. Такъ какъ она четнаго порядка, то $\frac{7}{19} - \frac{3}{8} = \frac{-1}{19.8}$; откуда: $7.8 - 19.8 = -1$.

Умноживъ всѣ члены этого равенства на 5, получимъ:

$$7.40 - 19.15 = -5 \quad \text{или} \quad 7.(-40) - 19.(-15) = 5.$$

Сравнивая послѣднее тождество съ даннымъ уравненіемъ, находимъ, что въ послѣднемъ за x можно принять число —40, а за y число —15.

Тогда $$x = -40 + 19t,\quad y = -15 + 7t.$$

Эти формулы можно упростить, замѣнивъ t на $t+2$:

$$x = -40 + 19(t+2) = -2 + 19t;\ y = -15 + 7(t+2) = -1 + 7t.$$

АРЖЕНИКОВЪ. К. Методика начальной ариѳметики. Изд. 23-е. Ц. 3 р. 50 к.

ЕГОРОВЪ, Ѳ. Методика ариѳметики. Для учителей. Изд. 7-е, съ значительными измѣненіями и дополненіями. 1916 г. Ц. 2 р. 50 к.

ЛАЙ, В. А. Руководство къ первоначальному обученію ариѳметики, основанное на результатахъ дидактическихъ опытовъ. Изд. 5-е, дополненное переводъ подъ ред. Д. Л. Волковскаго. 1916 г. Ц. 1 р. 75 к.

БОГОМОЛОВЪ, С. Вопросы обоснованія геометріи. Ч. I. Интуиція, математическая логика, идея порядка въ геометріи. Съ приложеніемъ статьи: философія математики въ работахъ. А. Пуанкаре. 1913 г. Ц. 1 р. 50 к.

ГОРЯЧЕВЪ, Д. проф. Основанія аналитической геометріи на плоскости. Учебникъ для дополнительнаго класса реальныхъ училищъ. Изд. 6-е, 1918 г. Ц. 1 р. 80 к.

— Основанія анализа безконечно-малыхъ. Учебникъ для дополнительнаго класса реальныхъ училищъ. Изд. 8-е, 1918 г. Ц.

КАЩИНЪ, Н. Основанія математическаго анализа. Учебная книга для старшихъ классовъ средней школы. 621 стр. 1916 г. Ц. 3 р.

ПЕНІОНЖКЕВИЧЪ, К. Основанія аналитической геометріи. Курсъ дополнительнаго класса реальныхъ училищъ. Изд. 3-е, 1918 г. Ц. 4 р. 20 к.

ПРЖЕВАЛЬСКІЙ, Е. Аналитическая геометрія на плоскости и въ пространствѣ и собраніе задачъ изъ аналитической геометріи. Изд. 5-е, 1905 г.

— Прямолинейная тригонометрія и собраніе тригонометрическихъ задачъ Изд. 9-е, 1916 г. Ц. 3 р.

— Пятизначныя таблицы логариѳмовъ чиселъ и тригонометрическихъ величинъ съ прибавленіемъ логариѳмовъ Гаусса, квадратныхъ и кубическихъ корней изъ числа сравнительныхъ таблицъ: русскихъ, метрическихъ и англійскихъ мѣръ и нѣкоторыхъ другихъ. Изд. 25-е, стереотипное, 1918 г. Ц. 3 р. 50 к.

ШАПОШНИКОВЪ, Н. А. Введеніе въ алгебру. Руководство для учениковъ среднихъ учебныхъ заведеній. 1887 г. Ц. 35 к.

— Курсъ прямолинейной тригонометріи и собраніе тригонометрическихъ задачъ. Изд. 23-е, 1918 г. Ц. 1 р. 70 к.

— Новый курсъ (алгебраическій) прямолинейной тригонометріи съ дополнительными статьями алгебры и собраніемъ тригонометрическихъ задачъ. 1904 г. Ц. 1 р.

КАЩИНЪ, Н. Методика физики. Пособіе для преподаванія физики въ средней школѣ. Изд. 2-е, переработанное и дополненное. 1918 г. Ц. 8 р.

КУРИЛОВЪ, В. проф. Учебникъ химіи для среднихъ учебныхъ заведеній въ двухъ частяхъ. Ч. I. Первоначальныя понятія. Металлоиды. Металлы. Изд. 2-е 1918 г. Ц. 6 р.

— То же. Ч. II. Органическая химія. Аналитическая реакція. 1916 г. Ц. 1 р.

НОАКЪ, К. Сборникъ задачъ для практическихъ работъ по физикѣ въ средней школѣ. Переводъ М. А. Савича, подъ ред. С. О. Майзеля. 1907 г. Ц. 1 р. 25 к.

ПАНТЕЛѢЕВЪ, В. Краткій курсъ основъ общей и физической химіи для химикотехническихъ и промышленныхъ училищъ. Съ 32 рис. въ текстѣ. 1916 г. Ц. 1 р. 20 к.

ПОНОМАРЕВЪ, Р. Сборникъ задачъ по элементарной физикѣ. Изд. 8-е. 1917 г. Ц. 2 р. 50 к.

СОКОВНИНЪ, Н. Космографія. Курсъ среднихъ учебныхъ заведеній. 160 рис. въ текстѣ и картой звѣзднаго неба. 1913 г. Ц. 1 р. 25 к.

СТРАТОНОВЪ, В. Космографія. (Начала астрономіи). Учебникъ для среднихъ учебныхъ заведеній и руководство для самообразованія. 256 рис. съ чертежами въ текстѣ. 6 многокрасочн. и цвѣтными иллюстраціями. 5 стереоскопическими таблицами и звѣздной картой. Изд. 3-е исправленное и дополненное. 1918 г. Ц. 3 р.

СТРАТОНОВЪ, В. Краткій курсъ космографіи (начала астрономіи). Учебникъ для женскихъ учебн. зав. и руководство для самообразованія. 1918 г. Ц. 4 р.

БРОДСКІЙ, ЛОМАШЕВСКАЯ, МЕНДЕЛЬСОНЪ, РЕФОРМАТСКІЙ, СИДОРОВЪ и СОЛОВЬЕВЪ. Нашъ міръ. Книга для занятій роднымъ языкомъ въ средней школѣ. Годъ приготовительный. Ц. 3 р. 20 к. То же. Ч. I. Ц. 4 р. Ч. II. Ц. 3 р. 50 к. То же. Ч. III. Ц. 4 р. То же. Ч. IV. Ц. 4 р.

БРОДСКІЙ, МЕНДЕЛЬСОНЪ и СИДОРОВЪ. Историко-литературная хрестоматія. Ч. I. Устная народная словесность. Ц. 5 р. Ч. II. Ц. 2 р. 50 к.

БѢЛОРУССОВЪ, И. Учебникъ теоріи словесности. Изд. 32-е. Ц. 1 р. 50 к.

НЕЗЕЛЕНОВЪ, А. Исторія русской словесности для среднихъ учебныхъ заведеній. Ч. I. Ц. 2 р. 75 к. То же. Ч. II. Ц. 3 р. 25 к.

САВОДНИКЪ, В. Краткій курсъ исторіи русской словесности. Съ древнѣйшихъ временъ до конца XVIII вѣка. Изд. 6-е. 1918 г. Ц. 7 р. 50 к.

— Очерки по исторіи русской литературы XIX вѣка. Ч. I. (Съ портретами русскихъ писателей). Изд. 12-е. 1918 г. Ц. 5 р. 50 к.

— Очерки по исторіи русской литературы XIX вѣка. Ч. II. Съ приложеніемъ портретовъ русскихъ писателей и синхроническихъ таблицъ. Изд. 12-е 1918 г. Ц. 4 р. 50 к.

ГЕФДИНГЪ, Г. Очерки психологіи, основанной на опытѣ. Пер. подъ ред. Колубовскаго. Изд. 6-е, 1914 г. Ц. 2 р.

НЕЧАЕВЪ, А. П., проф. Курсъ педагогической психологіи, для народныхъ учителей. Со многими рисунками и діаграммами. 1915 г. Ц. 1 р.

— „Очеркъ психологіи" для воспитателей и учителей. Изд. 5-е, дополненное (Съ рисунками въ текстѣ, съ приложеніемъ вопросника для составленія характеристикъ учащихся и указателя избранныхъ психологическихъ сочиненій). Ц. 1 р. 60 к.

— „Учебникъ психологіи" для среднихъ учебныхъ заведеній и самообразованія. (Со многими рисунками въ текстѣ и съ описаніемъ простыхъ психологическихъ опытовъ). Изд. 5-е, дополненное. Ц. 1 р.

ЧЕЛПАНОВЪ, Г., проф. Введеніе въ философію. Съ приложеніемъ вопросника и конспективнаго обзора исторіи философіи. Изд. 7-е. 1918 г. Ц. 8 р. 50 к.

— Введеніе въ экспериментальную психологію. Съ 167 рис. въ текстѣ Изд. 2-е, 1918 г. Ц. 7 р.

— Мозгъ и душа. Критика матеріализма и очеркъ современныхъ ученій о душѣ. Изд. 6-е, 1918 г. Ц. 5 р. 50 к.

— Элементарный курсъ философіи. Ч. I. Учебникъ психологіи для гимназій и самообразованія. Изд. 15-е, 1918 г. Ц. 3 р. 50 к.

— То же. Ч. II. Учебникъ логики для гимназій и самообразованія. Изд. 9-е 1918 г. Ц. 3 р. 50 к.

ЕЛПАТЬЕВСКІЙ, К. В. Учебникъ русской исторіи. Изд. 15-е. 1918 г.

МАРКОВЪ, Д. Записки по методикѣ исторіи. М. 1915 г., 159 стр. Изд. 3-е исправленное. Ц. 2 р.

— Родная исторія. Учебникъ для высшихъ начальныхъ училищъ и младшихъ классовъ средн. учебн. заведеній. XVI + 212 стр. со многими рисунками и карт. въ текстѣ, съ приложеніемъ хронологической и родословной таблицы по исторіи. 1916 г. Ц. 1 р. 80 к.

ПРѢСНЯКОВЪ, А. Русская исторія для младшихъ классовъ средн. учебн. завед. 1915 г. Ц. 50 к.

ПУЗИЦКІЙ, В. Отечественная исторія въ разсказахъ для младшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній. Изд. 17-е, 1917 г. Ц. 2 р. 80 к.

СТРОЕВЪ, В. Н. (магистръ русской исторіи). Учебникъ русской исторіи для младшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній и высшихъ начальныхъ училищъ. Съ 118 рис. и картами. 176 стр. Изд. 3-е, исправленное. 1918 г. Ц. 3 р.

Систематическій курсъ русской исторіи для старшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній. Вып. I-й (до Димитрія Самозванца включительно) 221 стр., съ 121 рис. въ текстѣ. 1918 г. Ц. 3 р. 50 к.